차 례

상 식

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업시대, 과학과 기술의 시대는 수학의 지식과 방법을 모르고서는 현대과학과 기술을 배울수도 없고 발전시킬수도 없다. 그것은 수학이 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 되기때문이다.

수학교육을 강화하면 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고력을 키워주어 그들의 창조적응용능력을 높은 수준에로 올려세울수 있다.

이리하여 수학교육은 사람들에게 자연과 사회를 개조하는데 필요한 지식과 방법을 가지게 할뿐만아니라 창조적응용능력을 키우는데서 중요한 자리를 차지한다.

수학을 잘 배워 그 지식과 방법을 잘 익히면 머리를 쓰는 힘이 커져서 아무리 복잡한 문제라도 그것을 해결할 합리적인 방도를 찾을수 있고 세계적인 발견과 발명도 척척 해나갈수 있다.

3학년 수학에서는 련립안갈기식, 여러마디식과 방정식 그리고 근사값과 그 계산, 유리식과 무리식, 1차함수와 2차함수, 2차방정식, 다각형의 성질과 원에 대한 지식들을 배운다.

이 지식들은 중학교 수학에서 중요한 자리를 차지한다.

우리는 위대한 령도자 **김정일**원수님의 뜨거운 사랑과 크나큰 배려를 가슴깊이 간직하고 조선을 위하여 배우고 또 배워 선군시대의 요구에 맞게 사회주의강성대국건설에 이바지할수 있는 수학지식과 방법을 소유하고 창조적응용능력을 키우기 위하여 적극 노력하여야 한다.

제1장. 다각형의 성질

제1절. 정리와 기초성질

1. 명제, 조건과 결론

알아보기 다음 글 또는 식이 옳은가 옳지 않은가?

1) 《평행직선에서 엇각은 같지 않다.》

2) 《$a=2$이면 $a-2=0$》

3) 《$x+5=8$》

> 수학에서 옳다든가 옳지 않다든가를 찍어서 말할수 있는 글이나 식을 **명제**라고 부른다.
>
> 명제가운데는 옳은것도 있고 옳지 않은것도 있다.

알아보기에서

1)《평행직선에서 엇각은 같지 않다.》: 옳지 않은 명제

2)《$a=2$이면 $a-2=0$이다.》: 옳은 명제

3) 《$x+5=8$》 : 명제가 아니다. (옳은지 옳지 않은지 찍어 말할수 없다.)

명제는 《 □이면 □이다.》의 두 부분으로 갈라볼수 있다.

례. 《2등변3각형의 두 밑각은 같다.》

이 명제를 다음과 같이 고쳐쓸수 있다.

《어떤 3각형이 2등변3각형이면 그 3각형의 두 밑각은 같다.》

이것은 다음과 같은 두개의 부분으로 되여있다.

$$\begin{cases}\text{《어떤 3각형이 2등변3각형이다.》} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p \\ \text{《그 3각형의 두 밑각은 같다.》} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots q\end{cases}$$

일반적으로 명제의 첫 부분을 p로, 둘째 부분을 q로 표시하면 그 명제는

《p이면 q이다.》

즉 $p \to q$로 표시할수 있다.

명제를 이런 모양으로 고쳤을 때 첫째 부분(p)을 **명제의 조건**, 둘째 부분(q)을 **명제의 결론**이라고 부른다.

명제는 조건과 결론으로 이루어져있다.

《p이면 q이다.》 즉 $p \to q$

(조건) (결론)

문 제

다음 명제들에서 조건과 결론을 말하여라.

1) 《2등변3각형은 뾰족3각형이다.》

2) 《△ABC에서 ∠A=∠R이면 ∠B, ∠C는 뾰족각이다.》

3) 《6의 배수는 짝수이다.》

4) 《평행직선에서 같은자리각은 같다.》

2. 정리와 증명

명제가 옳다는것을 밝히기 위해서는 명제의 조건으로부터 시작하여 이미 알고있거나 옳다는것이 밝혀진 사실들을 써가면서 결론을 이끌어내야 한다.

명제 《3각형의 아낙각들의 합은 180°이다.》를 밝혀보자.

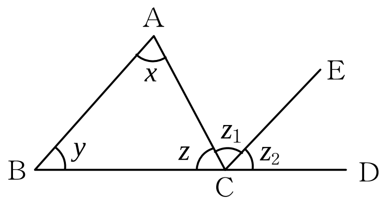


그림 1−1

그림 1−1에서처럼 점 C에서 한 변 AB에 평행인 직선을 그으면

$\angle x = \angle z_1$ (평행직선의 엇각)

$\angle y = \angle z_2$ (평행직선의 같은자리각)

따라서

$\angle x + \angle y + \angle z = \angle z_1 + \angle z_2 + \angle z = 180°$

명제가 옳다는것을 명제의 조건과 알고있는 성질을 가지고 밝혀내는것을 **증명**이라고 부른다.

례 1. 4각형의 아낙각의 합이 360°라는것을 증명하여라.(그림 1－2)

조건. ABCD는 4각형

결론. $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$

(증명) 대각선 AC를 그으면

△ABC와 △ACD가 생긴다.

△ABC의 아낙각의 합＝180°

△ACD의 아낙각의 합＝180°

4각형 ABCD의 아낙각의 합

＝△ABC의 아낙각의 합＋△ACD의 아낙각의 합

＝180°＋180°＝360°

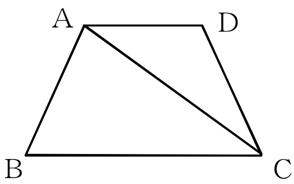


그림 1－2

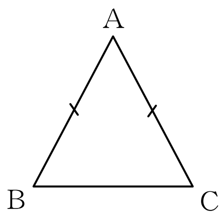


그림 1－3

문 제

《2등변3각형 ABC에서(AB＝AC) ∠B＝∠C이다.》에서 조건과 결론을 말하고 증명하여라.(그림 1－3)

수학에서 가장 기초로 되는 몇개의 명제는 명백하다고 보면서 증명하지 않고 써먹는다.

증명하지 않고 써먹기로 하는 기초로 되는 명제를 **기초성질**이라고 부른다.

례 2. 다음의것들은 수학에서 늘 쓰는 기초성질이다.

《$a=b$, $b=c$이면 $a=c$》

《a, b 가 아무런 수라도 $a+b=b+a$》

《주어진 두 점을 지나는 직선은 꼭 하나 있다.》

수학에서는 또한 다음과 같은 명제들도 기초성질로 잡는다.

기 초 성 질

1. 평행직선에서
   ① 같은자리각은 같다.
   ② 엇각은 같다.
2. 다음의 각각의 경우에 두 직선은 평행이다.
   ① 같은자리각이 같을 때
   ② 엇각이 같을 때
3. 다음의 각각의 경우에 두 3각형은 합동이다.
   ① 세쌍의 변이 각각 같을 때 (세변조건)
   ② 두쌍의 변과 그사이에 끼여있는 한쌍의 아낙각이 각각 같을 때 (변각변조건)
   ③ 한쌍의 변과 그에 붙어있는 두쌍의 아낙각이 각각 같을 때 (각변각조건)
4. 두 점을 맺는 선들가운데서 길이가 제일 짧은것은 선분이다.

알아보기 4각형의 아낙각들의 합이 360°라는것을 증명할 때 3각형에 관한 어떤 명제를 써먹었는가?

어떤 명제가 옳다는것이 증명되였다면 그 명제를 다른 명제들을 증명할 때 써먹을수 있다.

> 증명을 해서 옳다는것이 밝혀진 명제들가운데서 중요하게 쓰이는것을 **정리**라고 부른다.

례 3. 정리 《2등변3각형의 정각의 2등분선은 밑변에 수직이다.》를 증명하여라.(그림 1－4)

조건. △ABC에서 AB＝AC,

∠BAD＝∠CAD

결론. AD⊥BC

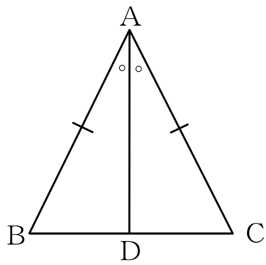


그림 1－4

(증명) △ABD와 △ACD에서

AB＝AC, AD :공통변

∠BAD＝∠CAD

∴ △ABD≡△ACD (변각변조건)

따라서 ∠ADB＝∠ADC

그런데 이 두 각의 합이 평각 ∠BDC와 같으므로

∠ADB＝2∠R÷2＝∠R

그러므로 AD⊥BC

명제를 나타내거나 증명할 때 또는 문제를 풀 때에는 쓰는 말의 뜻을 똑똑히 알고있어야 한다.

어떤 대상의 뜻을 밝혀놓은 글을 **정의**라고 부른다.

례 4. 《2의 배수를 짝수라고 부른다.》(짝수의 정의)

《두 직선이 직각으로 사귈 때 이 두 직선은 서로 수직이라고 말한다.》(두 직선의 수직의 정의)

알아보기 다음 정리의 조건과 결론을 바꾸어놓고 옳은가를 알아보아라.

《두 직선이 평행이면 같은자리각이 같다.》

정리 $p \to q$가 있을 때 조건과 결론을 바꾸어놓은 정리 $q \to p$가 옳을 때 이것을 처음정리의 **거꿀정리**라고 부른다.

례 5. 정리 《$\triangle ABC$에서 $AB=AC$이면 $\angle B=\angle C$이다.》의 조건과 결론은

조건. $(p)\cdots\triangle ABC$에서 $AB=AC$

결론. $(q)\cdots\triangle ABC$에서 $\angle B=\angle C$

조건과 결론을 바꾸어놓으면 다음과 같은 옳은 명제(거꿀정리)를 얻는다.

《$\triangle ABC$에서 $\angle B=\angle C$이면 $AB=AC$이다.》

문 제

1. 다음 정리를 증명하여라.
3각형에서 한 바깥각은 그곁에 있지 않는 두 아낙각의 합과 같다.

2. 바른3각형 ABC의 변 AC, CB에 $AP=CQ$인 점 P, Q를 정하고 AQ, BP의 사귐점을 O라고 할 때 다음것을 증명하여라.
1) $\triangle ABP$와 $\triangle AQC$는 합동이다.
2) $\angle BOQ=60°$이다.

3. $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$에서 $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$이면 $\angle C=C_1$이다. 증명하여라.

련습문제

1. 다음 명제들가운데서 옳은것과 옳지 않은것을 갈라내여라.
1) 한 변의 길이가 5cm인 두 바른3각형은 합동이다.
2) 4각형 $ABCD$와 4각형 $A_1B_1C_1D_1$이 바른4각형이면 두 4각형은 합동이다.
3) 평행직선에 한 직선이 사귀여 생긴 엇각은 같지 않다.
4) 직3각형에서 두 각은 직각이다.

2. 선분의 수직2등분선에 있는 점은 선분의 두 끝점으로부터 같은 거리에 있다. 증명하여라.

3. 문제 2의 거꿀정리를 만들고 증명하여라.

4. 각의 2등분선에 놓이는 점은 두 변으로부터 같은 거리에 있다. 증명하여라.

5. 두 직3각형은 다음과 같은 경우에 합동이라는것을 증명하여라.(직3각형의 합동조건)

1) 두쌍의 직각변이 각각 같을 때

2) 대응하는 한쌍의 변과 한쌍의 뾰족각이 각각 같을 때

3) 빗변들과 한쌍의 직각변이 각각 같을 때

6. 2등변3각형 ABC의 옆변 AB, AC의 연장선에 각각 D, E를 정하되 BC의 가운데점 M으로부터의 거리가 같게 하면 △ADE는 어떤 3각형인가?

7. 2등변3각형의 밑변의 한 점으로부터 다른 두 변까지의 거리의 합은 밑각의 정점에서 옆변에 그은 높이와 같다. 증명하여라.

제2절. 4각형

1. 평행4변형

> 두쌍의 맞은변이 각각 서로 평행인 4각형을 **평행4변형**이라고 부른다.

평행4변형의 정의로부터 그 성질을 이끌어낼수 있다.

례. 평행4변형에서 두쌍의 맞은변은 각각 서로 같다는것을 증명하여라.

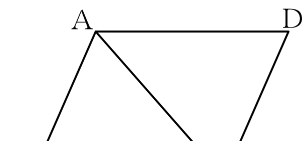


그림 1−5

조건. 4각형 ABCD에서

AB // DC, AD // BC

결론. AB＝DC, AD＝BC

(증명) 대각선 AC를 그으면(그림 1−5)

△ABC와 △CDA에서

∠BAC＝∠DCA(AB // DC)　(1)

∠BCA＝∠DAC(AD // BC)　(2)

AC: 공통변　(3)

(1), (2), (3)에 의하여

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$(각변각조건)

$\therefore$ AB=DC, AD=BC

알아보기 1. 례의 증명으로부터 평행4변형의 맞은각이 같다고 말할수 있는가?

2. 대각선 BD를 더 그었을 때 두 대각선이 서로 가운데점에서 사귀는가를 알아보아라.

> **정리 1.** 평행4변형에서
>
> 1) 두쌍의 맞은변은 각각 서로 같다.
>
> 2) 두쌍의 맞은각은 각각 서로 같다.
>
> 3) 두 대각선은 서로 가운데점에서 사귄다.

문 제

1. ▱ABCD의 대각선 BD에 정점 A와 C에서 수직선 AE, CF를 그으면 AE=CF임을 증명하여라.

2. ▱ABCD에서 대각선 AC와 BD의 사귐점을 O라고 하자. O를 지나는 직선과 변 AD, BC와의 사귐점을 각각 E, F라고 하면 OE=OF임을 증명하여라.

3. ▱ABCD(AB<AD)의 정점 A에서 ∠D의 2등분선에 그은 수직선이 변 BC와 사귀는 점을 E라고 하면 AB=BE임을 증명하여라.(그림 1-6)

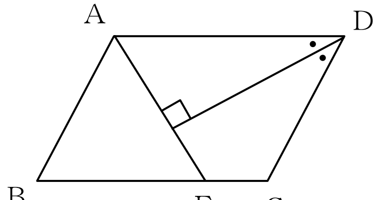


그림 1-6

4. 2등변3각형 ABC의 밑변 BC의 임의의 점 D에서 AB, AC에 평행인 직선을 그어 AC, AB와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하면 $\triangle FBD$와 $\triangle EDC$의 둘레의 길이의 합은 $\triangle ABC$의 둘레의 길이와 같다. 왜 그런가?

정리 2. 두쌍의 맞은변이 각각 서로 같은 4각형은 평행4변형이다.

조건. 4각형 ABCD에서

AB=DC, AD=BC

결론. 4각형 ABCD는 평행4변형

(증명) 대각선 AC를 그으면 (그림 1−7)

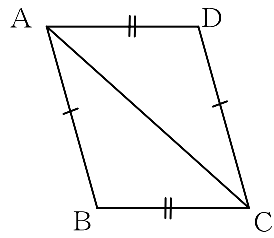


그림 1−7

△ABC와 △CDA에서

AB=DC (조건)

BC=AD (조건)

AC: 공통변

∴ △ABC≡△CDA (세변조건)

∴ ∠BAC=∠DCA

따라서 AB∥DC (엇각이 같으므로)

마찬가지로 ∠DAC=∠BCA로부터

AD∥BC

그러므로 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

정리 3. 한쌍의 맞은변이 서로 같고 또 평행인 4각형은 평행4변형이다.

조건. 4각형 ABCD에서

AB=DC, AB∥DC

결론. 4각형 ABCD는 평행4변형

(증명) 대각선 BD를 그으면 (그림 1−8)

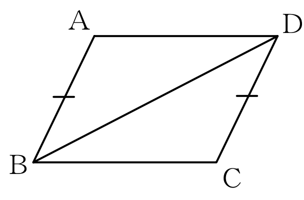


그림 1−8

△ABD와 △CDB에서

AB=DC (조건)

BD: 공통변

∠ABD=∠CDB (AB∥DC)

△ABD≡△CDB (변각변조건)

∴ ∠ADB=∠CBD

따라서 AD∥BC (엇각이 같으므로)

그러므로 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

정리 4. 두쌍의 맞은각이 각각 서로 같은 4각형은 평행4변형이다.

조건. 4각형 ABCD에서 ∠A=∠C, ∠B=∠D

결론. 4각형 ABCD는 평행4변형

(증명) 4각형의 아낙각의 합은 4∠R 이므로

∠A+∠B+∠C+∠D=4∠R

여기서 ∠A=∠C, ∠B=∠D

∴ ∠A+∠B+∠A+∠B =4∠R

∠A+∠B=2∠R (1)

또한 ∠A+∠DAE=2∠R (2)

(1), (2)로부터

∠B=∠DAE

따라서 AD // BC (같은자리각이 같으므로)

그리고 ∠DAE=∠B=∠D

따라서 AB // DC (엇각이 같으므로)

그러므로 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

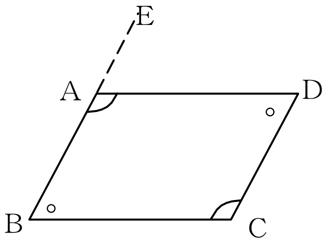


그림 1−9

정리 5. 4각형에서 두 대각선이 서로 가운데점에서 사귀면 이 4각형은 평행4변형이다.

조건. 4각형 ABCD에서

AO=OC, BO=OD (점 O는 두 대각선의 사귐점)

결론. 4각형 ABCD는 평행4변형

(증명) △AOB와 △COD에서

AO=OC (조건)

BO=OD (조건)

∠AOB=∠COD (맞문각)

∴ △AOB≡△COD (변각변조건)

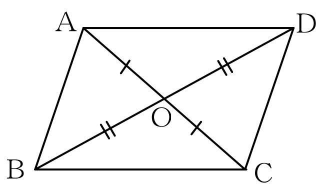


그림 1−10

$\therefore$ AB＝DC (1)

마찬가지로 △AOD≡△BOC

$\therefore$ AD＝BC (2)

(1), (2)로부터 정리 2에 의하여 4각형 ABCD는 평행4변형이다.

이상의것을 하나로 묶어보면 다음과 같다.

평행4변형이 될 조건

1) 두쌍의 맞은변이 각각 서로 평행일 때 (정의)
2) 두쌍의 맞은변이 각각 서로 같을 때 (정리 2)
3) 한쌍의 맞은변이 같고 또 평행일 때 (정리 3)
4) 두쌍의 맞은각이 각각 서로 같을 때 (정리 4)
5) 두 대각선이 서로 가운데점에서 사귈 때 (정리 5)

문 제

1. ▱ABCD의 변 AB, DC의 가운데점을 각각 E, F라고 할 때

1) DE＝BF임을 증명하여라.

2) 4각형 DEBF는 어떤 4각형인가?

2. 그림 1－11에서 4각형 ABCD는 평행4변형이고 BE, DF는 각각 ∠ABC, ∠ADC의 2등분선이다. 이때 4각형 BFDE도 평행4변형이라는것을 증명하여라.

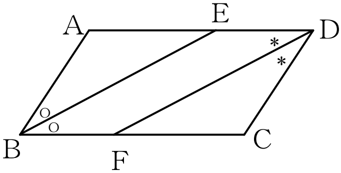


그림 1－11

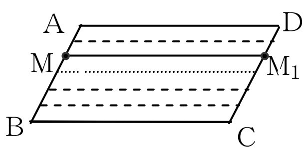


그림 1－12

3. ▱ABCD를 하나 그려라. 변 AB에 한 점 M을 찍고 이 점을 지나며 AD에 평행인 직선을 그어 사귀는 점을 M_1이라고 하여라. (그림 1－12) 이때

1) 4각형 AMM_1D는 무슨 4각형인가?

2) $MM_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} BC$이다. 왜 그런가? ($\underline{/\!/}$는 평행이며 같다는 기호이다.)

4. ▱ABCD를 하나 그리고 두 대각선의 사귐점을 O라고 하고 선분 BO와 OD의 가운데점을 각각 E, F라고 하면 4각형 AECF는 무슨 4각형인가?

2. 직4각형과 등변4각형

> 아낙각들이 다 직각인 평행4변형을 **직4각형**, 변들이 다 같은 평행4변형을 **등변4각형**이라고 부른다.

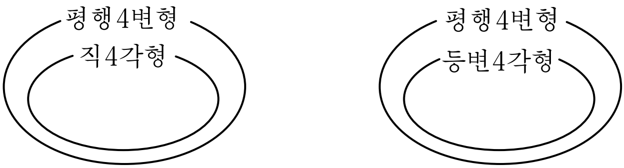


그림 1-13

직4각형과 등변4각형은 평행4변형의 성질을 다 가진다.

그리고 그밖에 특별한 성질을 더 가지고있다.

례. 직4각형의 두 대각선은 서로 같다는것을 증명하여라.

조건. 4각형 ABCD는 직4각형

결론. BD=AC

(증명) △DAB와 △CBA에서

DA=CB (직4각형의 맞은변)

AB : 공통변

∠A=∠B(=∠R) (직4각형의 아낙각)

∴ △DAB≡△CBA (변각변조건)

∴ BD=AC

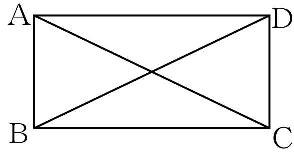


그림 1-14

거꾸로 두 대각선이 서로 같은 평행4변형은 직4각형이라는것을 알수 있다.

알아보기 1. 등변4각형의 두 대각선은 서로 수직이라고 말할수 있는가?

2. 그 거꿀도 성립하겠는가?

평행4변형이 직4각형이 될 조건

1) 한 아낙각이 직각일 때

2) 두 대각선이 같을 때

평행4변형이 등변4각형이 될 조건

1) 서로 이웃한 두 변이 같을 때

2) 두 대각선이 서로 수직일 때

바른4각형은 직4각형이면서 동시에 등변4각형이다.

바른4각형은 변들이 다 같은 직4각형 또는 아낙각들이 다 직각인 등변4각형이다.

직 … 직4각형의 모임

등 … 등변4각형의 모임

바 … 바른4각형의 모임

은 그림과 같은 관계에 있다는것을 알 수 있다.

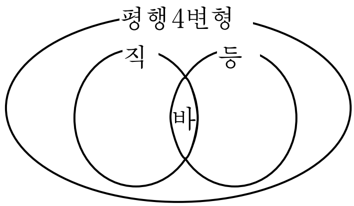


그림 1−15

문 제

1. 그림 1−15에서 직4각형의 모임, 등변4각형의 모임에는 각각 어떤 도형이 속하겠는가?

2. 1) 평행4변형에서 한 대각선을 그으면 3각형이 2개 생긴다. 평행4변형이 직4각형, 등변4각형, 바른4각형으로 되면 그 3각형은 어떤 3각형으로 되는가?

2) 그림 1−16에서 빗선을 친 부분에는 어떤 3각형이 속하겠는가?

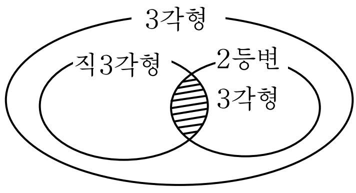


그림 1−16

3. 다음의 4각형들가운데서 직4각형과 등변4각형을 찾아내여라.

① AB=CD, AB∥CD, AC=BD

② AB=DC, AD=BC, AB=BC

③ AB∥DC, AD=BC, ∠B=∠C

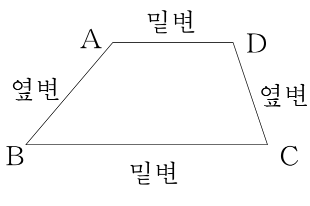
④ AB=AD, BC=DC, AC⊥BD

⑤ AO=OC, BO=OD, ∠B=90° (점 O는 두 대각선의 사귐점)

4. 평행4변형에 한 대각선을 그으면 합동인 2개의 3각형이 생긴다. 그 3각형이 직3각형, 2등변3각형 또는 직2등변3각형일 때 그 평행4변형은 무슨 4각형인가?

3. 제 형

> 한쌍의 맞은변이 서로 평행인 4각형을 **제형**이라고 부른다.
>
> 제형에서 평행인 두 변을 **밑변**, 나머지 변을 **옆변**이라고 부른다.



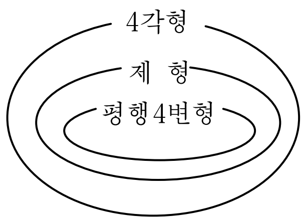
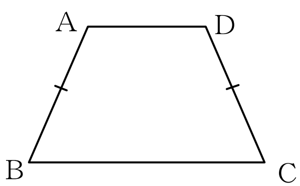


그림 1−17

두 옆변이 평행이 아니면서 서로 같은 제형을 **바른제형**이라고 부른다.

앞으로 제형과 평행4변형은 갈라볼 때도 있다.



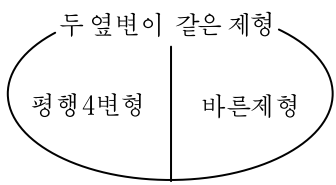
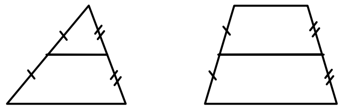


그림 1−18

알아보기 제형 ABCD에서 밑변 AD의 길이를 0(령)에로 가져가면 어떤 도형이 생기는가?

3각형 또는 제형에서 두 옆변의 가운데점을 맺는 선분을 **중간선**이라고 부른다.	

례. △ABC에서 중간선 MN은 밑변에 평행이며 $MN=\frac{1}{2}BC$이다. (그림 1−19)

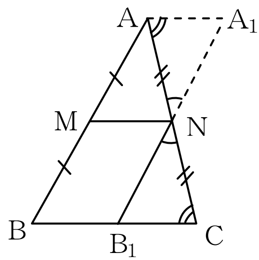


그림 1−19

조건. △ABC에서 AM=MB, AN=NC

결론. MN//BC, $MN=\frac{1}{2}BC$

(증명) N을 지나며 AB에 평행인 직선과 A를 지나며 BC에 평행인 직선을 그어 사귐점을 A_1, B_1이라고 하자.

그러면 $\triangle B_1CN$과 $\triangle AA_1N$에서

$AN=NC$, $\angle C=\angle A_1AN$, $\angle B_1NC=\angle ANA_1$이므로

$\triangle B_1CN\equiv\triangle AA_1N$

$\therefore A_1N=B_1N=\frac{1}{2}A_1B_1$

그런데 $AM=MB=\frac{1}{2}AB$, $AB=A_1B_1$이므로 $BM \underline{/\!/} B_1N$

따라서 MBB_1N은 평행4변형이다.

$\therefore MN/\!/BC$

그리고 $MN=BB_1=AA_1=B_1C$이므로 $MN=\frac{1}{2}BC$

문 제

1. 제형 ABCD(AD//BC)가 바른제형이면 ∠B=∠C이다. 증명하여라.
2. 제형 ABCD(AD//BC, AB∦DC)에서 ∠B=∠C이면 AB=DC이다. 증명하여라. (∦는 평행이 아니라는 기호이다.)
3. 바른제형에서 두 대각선은 서로 같다. 증명하여라.

> **정리 6.** 1) 3각형의 중간선은 밑변에 평행이며 밑변의 절반과 같다.
> 2) 제형의 중간선은 밑변에 평행이며 두 밑변의 합의 절반과 같다.

(증명) 1)은 례에서 보았다.

2) BC의 연장선과 DM의 연장선의 사귐점을 E라고 하면

△EMB와 △DMA에서

AM=MB (조건)

∠EMB=∠AMD (맞문각)

∠DAM=∠EBM (엇각)

이므로

△EMB≡△DMA

∴ DM=ME, AD=BE

∴ △DEC에서 MN은 중간선이다.

이때 EC=BC+AD

∴ MN $\mathbin{\underline{/\!/}}$ $\frac{1}{2}$(BC+AD)

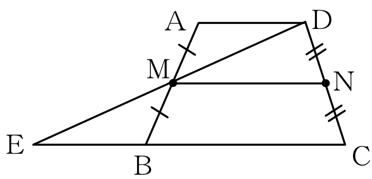


그림 1-20

> **정리 7.** 3각형의 세 가운데선은 한 점에서 사귀며 그 점에서 각각 2:1의 비로 나누인다.

조건. △ABC에서 BD=DC, CE=EA, AF=FB

결론. ① AD, BE, CF는 한 점 G에서 사귄다.

② AG:GD=BG:GE=CG:GF =2:1

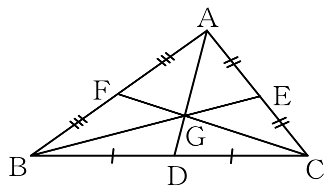


그림 1-21

(증명) △ABC에서 두 가운데선 BE, CF의 사귐점을 G라고 하자. (그림 1-21)

가운데선 AD도 점 G를 지나며 ②가 성립한다는것을 밝히자.

BG, CG의 가운데점을 각각 M, N이라고 하고 4각형 FMNE를 그리면 선분 FE, MN은 각각 △ABC, △GBC의 중간선이므로(그림 1-22)

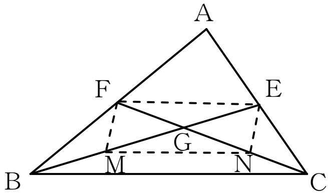


그림 1-22

$$FE /\!/ BC,\ FE = \frac{1}{2}BC$$

$$MN /\!/ BC,\ MN = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore\ FE \mathrel{\underline{/\!/}} MN$$

그러므로 4각형 FMNE는 평행4변형이다. (정리 3)

$$\therefore\ FG = GN,\ EG = GM$$

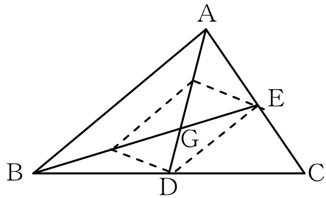


그림 1-23

따라서 점 G는 가운데선 BE, CF를 각각 2:1로 나눈다.

이와 마찬가지로 가운데선 AD도 선분 BE를 2:1로 나누는 점 G를 지나며 이 점에서 2:1로 나누인다. (그림 1-23)

> 3각형의 세 가운데선이 사귀는 점을 3각형의 **무게중심**이라고 부른다.

문 제

1. 3각형의 세 중간선을 다 그으면 3각형은 합동인 4개의 3각형으로 나누인다는것을 증명하여라.
2. 4각형 ABCD가 있다. 변 AB, BC, CD, DA의 가운데점을 각각 M, N, P, Q라고 하면 4각형 MNPQ는 평행4변형이다. 증명하여라.
3. AB<AC인 △ABC에서 변 BC의 가운데점을 M이라고 하고 ∠A의 2등분선에 B에서 내리그은 수직선을 BN이라고 하면

$$MN = \frac{1}{2}(AC - AB)$$

가 성립한다. 증명하여라.

4. AB<AC인 △ABC에서 ∠A의 2등분선에 정점 B, C에서 각각 수직선 BD, CE를 긋고 변 BC의 가운데점을 M이라고 하면

$$MD = ME = \frac{1}{2}(AC-AB)$$

임을 증명하여라.

련습문제

1. 다음 말이 옳은가?

1) 두 대각선이 같은 등변4각형은 바른4각형이다.

2) 대각선이 같은 평행4변형은 바른4각형이다.

2. 4각형 ABCD에서 AD∥BC, AD=3cm, BC=5cm, ∠B=50°, ∠C=70°이다. 이 4각형을 그려라.

3. 4각형 ABCD에서 두 대각선의 사귐점을 O라고 할 때 OA=OD, OB=OC, OA≠OB이면 이 4각형은 바른제형이다. 증명하여라.(그림 1−24)

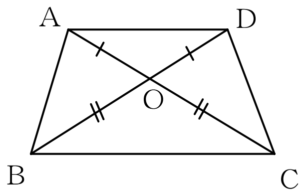


그림 1−24

4. 제형의 면적은 중간선에 높이를 곱한 적과 같다. 증명하여라.

5. 원에서 수직인 두 직경의 끝점들을 차례로 맺으면 바른4각형이 얻어진다는것을 증명하여라.

6. △ABC의 무게중심 G를 세 정점과 각각 맺으면 그 3각형의 면적이 3등분된다. 증명하여라.

복습문제

1. 다음 명제들의 거꿀정리를 만들고 옳은가 옳지 않은가를 밝혀라.

1) 두 각이 직각인 4각형은 직4각형이다.

2) 세 각이 같은 3각형은 바른3각형이다.

2. 바른3각형을 하나 그리고 변 AC, BC에 각각 P, Q를 AP = CQ로 되게 찍어라. 이때 AQ와 BP를 비교하여라.

3. 선분 AB를 하나 긋고 그 선분에 한 점 C를 찍어라. 다음에 AB에 관하여 같은쪽에 두 바른3각형 ACD와 BCE를 그려라. 이때 AE와 BD를 비교하여라.

4. 바른3각형 ABC를 그리고 변 BC에 한 점 D를 찍어라. 다음 바른3각형 ADE를 AD에 관하여 점 B의 반대쪽에 그려라. 이때 BD와 CE를 비교하여라.

5. △ABC를 하나 그리고 ∠A의 2등분선 AD를 그어라. 다음에 변 CA의 연장선에 AE=AB 되게 점 E를 찍어라. 이때 직선 BE와 AD는 서로 평행이라는것을 증명하여라.

6. 직3각형 ABC의 빗변 BC의 가운데점 M을 지나며 BC에 수직인 직선을 긋고 ∠A의 바깥각의 2등분선과의 사귐점을 N이라고 하면 △MAN은 어떤 3각형인가?

7. 같은 중심을 가진 두 원둘레가 있다. 한 원둘레의 직경 AC와 다른 원둘레의 직경 BD가 서로 수직이다. 4각형 ABCD는 무슨 4각형인가?

8. ▱ABCD의 대각선 AC를 긋고 ∠DAC의 2등분선이 BC의 연장선과의 사귐점을 E라고 하면 AC=CE이다. 증명하여라.

9. ▱ABCD의 정점 A와 C를 지나 서로 평행인 두 직선을 그어 대각선 BD와의 사귐점을 E, F라고 하자. 이때

   1) △ABE≡△FCD임을 증명하여라.

   2) 4각형 AECF는 평행4변형이라는것을 증명하여라.

10. ▱ABCD에서 AB, BC, CD, DA의 가운데점 E, F, G, H를 찍고 직선 AF, BG, CH, DE를 그었다.(그림 1－25)
이 네 직선은 1개의 평행4변형을 만든다는것을 증명하여라.

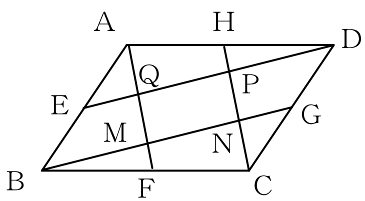


그림 1－25

11. ▱ABCD에서 ∠B의 2등분선이 AD와 사귀는 점을 P라고 할 때 △ABP는 2등변3각형이라는것을 증명하여라.

12. 한 변이 1m인 바른4각형의 대각선을 한 변으로 하는 바른4각형의 대각선의 길이를 구하여라.

13. 바른4각형 ABCD의 변 AB, BC, CD, DA에 각각 점 P, Q, R, S를 잡되 AP＝BQ＝CR＝DS 되게 하면 4각형 PQRS는 바른4각형이라는것을 증명하여라.

14. 제형 ABCD(AD//BC, AB∦DC)에서 대각선 AC＝BD이면 그 제형은 바른제형이다. 증명하여라.

15. 직4각형 ABCD의 종이로 그림 1－26과 같이 대각선 BD를 선분으로 하여 접고 정점 A와 C_1을 맺으면 4각형 $ABDC_1$은 바른제형이다. 증명하여라.

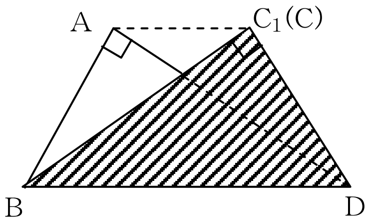


그림 1－26

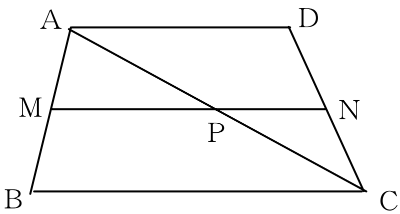


그림 1－27

16. 제형 ABCD(AD//BC)에서 중간선 MN＝20cm이고 대각선 AC가 선분 MN을 3:2로 나눈다. 두 밑변의 길이를 구하여라.(그림 1－27)

제2장. 련립안같기식

제1절. 수모임과 구간

해보기 1) 1보다 크고 10보다 작은 수들을 모아보아라.
2) 1과 25사이에 있는 짝수들을 모아보아라.

> 일정한 조건에 맞는 대상들을 모으면 모임이 된다.
>
> 모임을 이루는 하나하나의 대상을 그 모임의 **원소**라고 부른다.
>
> 모임 A에 원소 a가 들어있다는것을 $A \ni a$(또는 $a \in A$)로 표시하고 이때 원소 a는 모임 A에 **든다**고 말한다.
>
> 모임 A에 원소 a가 들어있지 않다는것을 $A \not\ni a$(또는 $a \notin A$)로 표시하고 이때 원소 a는 모임 A에 **들지 않는다**고 말한다.

례 1. 수 1, 2, 3, 4, 5로 된 수모임을 {1, 2, 3, 4, 5}로 표시한다.

이때 $\{1, 2, 3, 4, 5\} \ni 3$, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \not\ni 6$이다.

례 2. 20의 약수들의 모임을 A라고 할 때 5가 A에 속하는가? 13은?

(풀이) $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로

$5 \in A$, $13 \notin A$

문 제

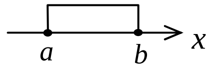
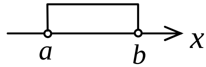
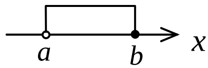
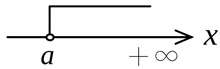
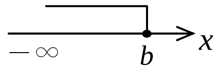
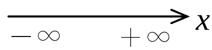
1. 다음것이 옳은가?

-3과 4사이의 옹근수들의 모임을 A로 표시할 때

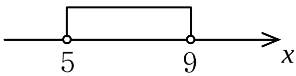
1) $-2 \notin A$ 2) $\frac{1}{2} \in A$ 3) $0 \in A$

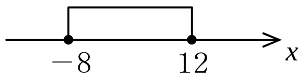
2. 3보다 큰 수들의 모임을 $\{x \mid x > 3\}$으로 표시한다. 다음것이 옳은가?

1) $\{x \mid x > 3\} \ni 7$ 2) $\{x \mid x < 5\} \ni 7$

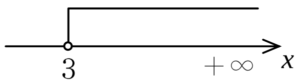
구간의 종류			
모임	이름	구간표시	수축표시
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	닫긴구간	$[a,\ b]$	
$\{x \mid a < x < b\}$	열린구간	$(a,\ b)$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	반열린구간	$(a,\ b]$	
$\{x \mid x > a\}$	반무한구간	$(a,\ +\infty)$	
$\{x \mid x \leq b\}$	반무한구간	$(-\infty,\ b]$	
$\{x \mid x$는 수전부$\}$	무한구간	$(-\infty,\ +\infty)$	
$+\infty$: 플루스무한대　　$-\infty$: 미누스무한대			

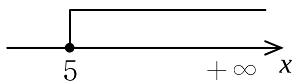
례 3. 1) $A=\{x \mid 5< x <9\}$, $B=\{x \mid -8\leq x \leq 12\}$을 구간으로 표시하면





2) $A=\{x \mid x >3\}$, $B=\{x \mid x \geq 5\}$을 구간으로 표시하면





례 4. 안같기식

$$x-5<-3$$

의 풀이모임을 구간으로 표시하여라.

(풀이) 안같기식을 풀면

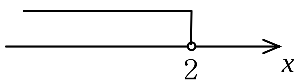
$x-5<-3$

$x<-3+5$

$x<2$

$\therefore$ 풀이모임은 $(-\infty,\ 2)$

구간으로 표시하면



문 제

1. 다음 수모임을 구간으로 표시하여라.

1) $\{x \mid -1 \leqq x < 5\}$ 2) $\{x \mid x > -2\}$ 3) $\{x \mid x \leqq -3\}$

2. 다음 사실을 식으로 쓰고 x의 값을 구간으로 표시하여라.

1) x는 3보다 크다. 2) x는 9보다 작지 않다.

3) x는 7보다 작다. 4) x는 10보다 크지 않다.

3. 다음 안갈기식의 풀이모임을 수축에 표시하고 구간으로 표시하여라.

1) $x > 5$ 2) $x - 6 \geqq 0$

3) $x - 7 < 0$ 4) $x - 8 \leqq 0$

해보기 구간 $(65, +\infty)$, $(-\infty, 80)$과 $(-\infty, 75]$를 한 수축에 표시하고 공통으로 들어있는 수모임을 구간으로 표시하여라.

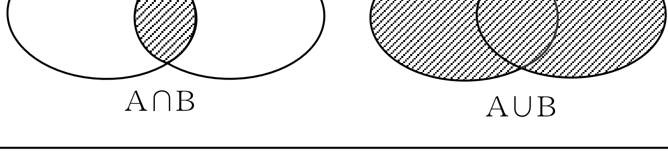
모임의 사귐과 합

모임 A에도 속하고 B에도 속하는 원소들로 이루어진 모임을 A와 B의 **사귐** 또는 **공통부분**이라고 부르고 $A \cap B$와 같이 표시한다. 즉

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

모임 A, B가운데서 어느 하나에라도 속하는 원소들로 이루어진 모임을 A와 B의 **합**이라고 부르고 $A \cup B$와 같이 표시한다. 즉

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$$



$A \cap B$　　　　$A \cup B$

례 5. $A = \{3, 4, 6\}$, $B = \{2, 5, 6\}$일 때

$A \cap B = \{3, 4, 6\} \cap \{2, 5, 6\} = \{6\}$

$A \cup B = \{3, 4, 6\} \cup \{2, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

례 6. $(-\infty, 5]\cap(-2, +\infty)=(-2, 5]$ (그림 2-1)

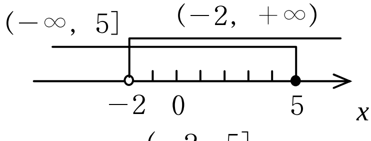


그림 2-1

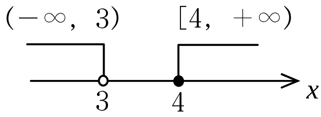


그림 2-2

원소가 한개도 없는 모임도 생각하고 그것을 **빈모임**이라고 부르며 기호 ϕ로 표시한다.

두 모임 A, B에 공통부분이 없을 때 $A\cap B=\phi$

례 7. $(-\infty, 3)\cap[4, +\infty)=\phi$ (그림 2-2)

문 제

1. 다음 구간을 구하여라.

1) $(-\infty, 9)\cap(2, +\infty)$ 2) $(-\infty, 3)\cap(-\infty, 5)$

3) $(-3, 5)\cup(2, 6]$ 4) $(-3, 5)\cap(2, 6]$

5) $[2, 4)\cup[2, 7)$

2. 다음 수모임을 수축에 표시하여라.

1) $[2, 5)\cap[3, 6)$ 2) $(3, 5]\cup(5, 7]$

3. 16의 약수들의 모임을 A, 24의 약수들의 모임을 B라고 할 때 $A\cap B$를 구하여라.

4. A가 4보다 크고 12보다는 작은 홀수들의 모임이고 B가 3보다 크고 12보다는 크지 않은 짝수들의 모임일 때 $A\cup B$와 $A\cap B$를 구하여라.

련습문제

1. 다음것이 옳은가?

1) 수모임 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$를 구간으로 표시하면 $[1, 5]$이다.

2) 안갈기식 $x<3$의 옹근수풀이모임은 $(-\infty, 3)$이다.

2. 다음 수모임을 수축에 표시하여라.

1) $\{x|x>4\}$ 2) $\{x|x\leqslant-2\}$ 3) $\{x|-2<x\leqslant5\}$

4) $\{x|-3\leqslant x<0\}$ 5) $\{x|-1<x<6\}$ 6) $\{x|2\leqslant x\leqslant7\}$

3. 다음 구간을 구하여라.

1) $(-\infty, 3] \cap (-2, +\infty)$　　2) $[-1, 2) \cup [1, 6]$

3) $(3, 8) \cap (3, 6]$　　4) $(2, 6] \cup [5, 8)$

4. 다음 구간을 풀이모임으로 하는 안같기식을 하나씩 써라.

1) $(6, +\infty)$　　2) $[9, +\infty)$

3) $(-\infty, 5)$　　4) $(-\infty, 3)$

5. $A=\{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B=\{x \mid 0 < x \leqslant 7\}$일 때 다음것들을 각각 구하고 비교하여라.

1) $A \cup B$, $B \cup A$　　2) $A \cap B$, $B \cap A$

3) $(A \cup B) \cap A$, $A \cup A$　　4) $(A \cap B) \cup B$, $B \cap B$

제2절. 련립안같기식

1. 련립안같기식

련립안같기식

몇개의 안같기식에 다 맞는 변수값 즉 공통풀이를 생각할 때 그 안같기식들을 한데 묶어놓은것을 **련립안같기식**이라고 부른다.

례. $\begin{cases} 2x+5>9 \\ x-1<4 \end{cases}$

련립안같기식에 들어있는 모든 안같기식들의 공통풀이를 그 련립안같기식의 **풀이**라고 부른다.

례. 2가 다음 련립안같기식의 풀이인가?

$$\begin{cases} 3x-1<8 & \text{①} \\ x+4>2 & \text{②} \end{cases}$$

(풀이) 매 안같기식의 x에 2를 갈아넣으면

$$\begin{cases} 3\cdot 2-1<8 \\ 2+4>2 \end{cases} \quad \text{즉} \quad \begin{cases} 5<8 \\ 6>2 \end{cases}$$

이므로 2는 안같기식 ①과 ②에 다 맞는다.

즉 2는 련립안같기식의 풀이이다.

문 제

1. 수모임 {-4, -2, 0, 3}의 원소들가운데서 다음 련립안갈기식의 풀이를 찾아라.

1) $\begin{cases} x-2<0 \\ x+3>0 \end{cases}$　　　　2) $\begin{cases} 2x-1>-4 \\ x-9<0 \end{cases}$

2. 수모임 {-3, -1, 0, 1, 4}의 원소들가운데서 다음 련립안갈기식의 풀이를 찾아라.

$$\begin{cases} 2x-4<0 \\ 3-x<5 \end{cases}$$

3. 6보다 작은 자연수들가운데서 다음 련립안갈기식의 풀이를 찾아라.

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 4>x-1 \end{cases}$$

2. 련립안갈기식의 풀이법

련립안갈기식의 풀이전부를 구하는것을 그 련립안갈기식을 **푼다**고 말한다.

해보기 련립안갈기식 $\begin{cases} x-2<0 \\ x+3>0 \end{cases}$

의 매 안갈기식의 풀이모임을 구하고 그것들을 한 수축에 표시하여라. 두 풀이모임의 공통부분에 속해있는 모든 수가 련립안갈기식의 풀이인가?

> 련립안갈기식을 풀려면 그것을 이루고있는 매개 안갈기식을 따로따로 풀어서 풀이모임을 구하고 그 어느 모임에나 다 들어있는 풀이들을 갈라내면 된다.

례 1. 련립안갈기식

$$\begin{cases} 2x+50>180 & ① \\ 2x+50<210 & ② \end{cases}$$

을 풀어라.

(풀이) 안같기식 ①을 풀면

$2x > 180 - 50$

$x > 65$

풀이모임은 (65, +∞)

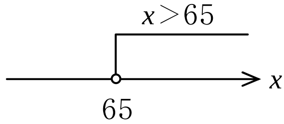


그림 2-3

안같기식 ②를 풀면

$2x < 210 - 50$

$x < 80$

풀이모임은 (-∞, 80)

두 안같기식의 풀이모임들을 한 수축에 표시하면 그림과 같다.

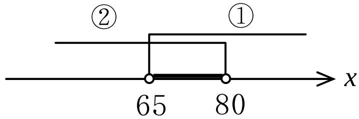


그림 2-4

답. (65, 80)

련립안같기식이 풀이를 가지지 않을수도 있다. 그런 경우에는 그것을 밝히는것도 련립안같기식을 푸는것으로 본다.

례 2. 다음 련립안같기식이 풀이를 가지지 않는다는것을 밝혀라.

$$\begin{cases} x-4>0 & \text{①} \\ x+3<0 & \text{②} \end{cases}$$

(풀이) ①의 풀이모임은 4보다 큰 수전부의 모임 즉

(4, +∞)

②의 풀이모임은 -3보다 작은 수전부의 모임 즉 (-∞, -3)

①, ②의 풀이모임을 한 수축에 표시하면 그림 2-5와 같다.

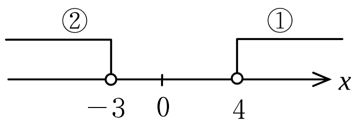


그림 2-5

그러므로 ①, ②에 다 맞는 수는 없다. 즉

$(-\infty,\ -3) \cap (4,\ +\infty) = \phi$

답. ϕ

문 제

1. 수축을 리용하여 7보다 작은 수전부의 모임과 7보다 크지 않은 수전부의 모임의 차이를 밝혀라.

2. 다음 련립안갈기식의 풀이모임을 수축에 표시하여라.

1) $\begin{cases} x-6<0 \\ x+5>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-5\le 0 \\ x-3>0 \end{cases}$

3. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x-4>0 \\ 5+x\le 12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4>x-1 \\ x<0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+120<600 \\ 215-6x>5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x<\dfrac{1}{2} \\ 27>-9x \end{cases}$

례 3. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

$$\begin{cases} x-6<0 & ① \\ -3x+2<0 & ② \end{cases}$$

(풀이) 안갈기식 ①을 풀면

$$x-6<0$$
$$x<6$$

풀이모임을 A로 표시하면 A=$(-\infty,\ 6)$

안갈기식 ②를 변형하면

$$-3x+2<0$$
$$2<3x$$
$$x>\frac{2}{3}$$

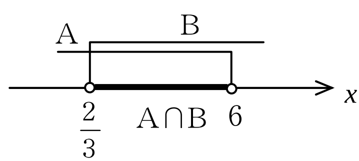


그림 2−6

풀이모임을 B로 표시하면

$$B=\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$$

따라서 련립안갈기식의 풀이모임은

$$A\cap B=\left(\frac{2}{3},\ 6\right)$$

답. $\left(\frac{2}{3},\ 6\right)$

례 4. 다음 련립안같기식을 풀어라.

$$\begin{cases} 5x+2\ge 3x & ① \\ -2x+1\ge 4x+13 & ② \end{cases}$$

(풀이) ①을 풀면

$$5x+2\ge 3x$$
$$5x-3x\ge -2$$
$$2x\ge -2$$
$$x\ge -1$$

②를 풀면

$$-2x+1\ge 4x+13$$
$$-2x-4x\ge 13-1$$
$$-6x\ge 12$$
$$x\le -2$$

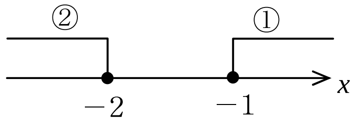


그림 2−7

그림에서 볼수 있는바와 같이 ①, ②의 공통부분이 없다. 즉 풀이모임은 빈모임이다.

답. ϕ

문 제

1. 다음 련립안같기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x-1<0 \\ 2+3x<0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+1>0 \\ -2x+3>0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x+2>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6-x>0 \\ -x-1<0 \end{cases}$

2. 다음 련립안같기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x-5>0 \\ 3x\le 18 \\ -3x\le -18 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x-2\ge 0 \\ x\le 2 \end{cases}$

례 5. 다음 안갈기식을 풀어라.

$$-1<3-2x\le 3$$

(풀이) 주어진 안갈기식은 련립안갈기식

$$\begin{cases}-1<3-2x\\3-2x\le 3\end{cases}$$

을 줄여서 쓴것이다.

첫째 안갈기식을 풀면

$$2x<4,\qquad x<2$$

둘째 안갈기식을 풀면

$$2x\ge 0,\qquad x\ge 0$$

이리하여 풀이모임은 [0, 2)

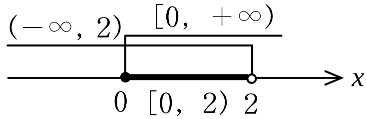


그림 2−8

답. [0, 2)

례 6. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

$$\begin{cases}3x+2\ge 0\\-3x-2\ge 0\end{cases}$$

(풀이) 둘째 안갈기식에 −1을 곱하면

$$3x+2\le 0$$

이 나온다.

이것과 첫째 안갈기식을 함께 보면 왼변이 같다.

그런데 그것이 0보다 작지 않으면서 크지도 않아야 하므로 주어진 련립안갈기식의 풀이모임은

$$3x+2=0$$

의 풀이모임 하나뿐이다. 즉

$$x=-\frac{2}{3}$$

답. $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

문 제

1. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases}3x-4<2x-1\\5-3x>4-4x\end{cases}$ 2) $\begin{cases}6x+1\ge 4x+3\\7x-5<3x+3\end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x-(x-4)<6 \\ 2x \le 3(2x+1)+9 \end{cases}$　　4) $\begin{cases} 3x+5 \ge 2x+9 \\ 6+4x>8+3x \end{cases}$

2. 다음 련립안같기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{x-1}{2}>1 \\ \dfrac{1}{5}(x-2) \ge x-\dfrac{2}{3} \end{cases}$　　2) $\begin{cases} \dfrac{7-2x}{2}+3<\dfrac{3+4x}{5} \\ \dfrac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x) \end{cases}$

3. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $0 \le 3(x+2)-5<10$　　2) $x-1<2x-6 \le 3$

4. 다음 련립안같기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 5x-12 \ge 0 \\ 3x=x+7 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} 3(x+5)-12>0 \\ x+4=6 \end{cases}$

해보기 그림 2－9는 1차식 $y=\dfrac{1}{3}x+1$의 그라프이다.

1) $y=0$ 인 x의 값 즉 $\dfrac{1}{3}x+1=0$ 의 풀이는 얼마인가?

2) $y>0$ 인 x의 값 즉 안같기식 $\dfrac{1}{3}x+1>0$ 의 풀이모임은 어떤 구간인가?

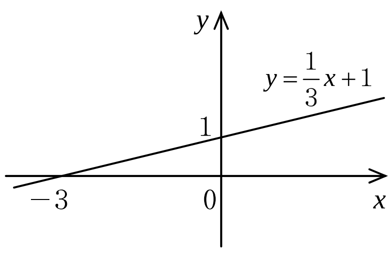
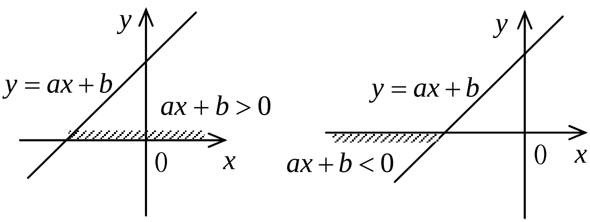


그림 2－9

3) $y<0$ 인 x의 값 즉 안같기식 $\dfrac{1}{3}x+1<0$ 의 풀이모임은 어떤 구간인가?

안갈기식 $ax+b>0(a\neq 0)$ 의 풀이모임은 $y=ax+b$ 의 그라프에서 x축의 웃쪽에 놓이는 부분의 x값구간이고 $ax+b<0(a\neq 0)$ 의 풀이모임은 x축의 아래쪽에 놓이는 부분의 x값구간이다.



례 7. $\begin{cases} x+1>0 & ① \\ -2x+3>0 & ② \end{cases}$

을 그라프로 풀어라.

(풀이) 두 1차식

$y=x+1$

$y=-2x+3$

의 그라프를 한 자리표평면에 그리면 그림과 같다.

그림에서 보면 ①의 풀이모임은 (−1, +∞)이고 ②의 풀이모임은 (−∞, 1.5)

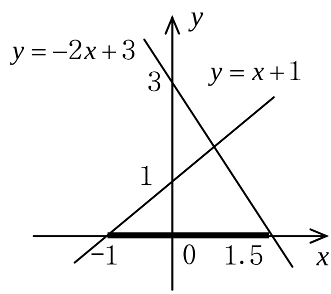


그림 2−10

두 구간의 공통부분은 (−1, 1.5)

답. (−1, 1.5)

례 8. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+2>0 & ① \\ 4x-7<x+2 & ② \end{cases}$

를 그라프로 풀어라.

(풀이) 안같기식 ②를 변형하면

$$-3x+9>0$$

두 1차식

$$y=\frac{1}{2}x+2,\quad y=-3x+9$$

의 그라프를 한 자리표 평면에 그리면 그림 2－11과 같이 된다. 그러므로 주어진 련립 안같기식의 풀이모임은

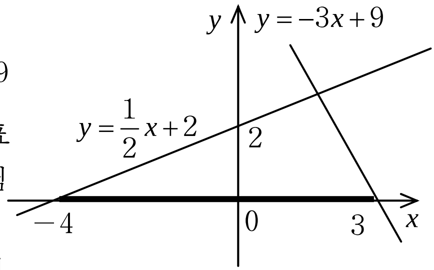


그림 2－11

$$(-4,\ +\infty)\cap(-\infty,\ 3)=(-4,\ 3)$$

답. $(-4,\ 3)$

문 제

1. 다음 련립안같기식을 그라프로 풀어라.

1) $\begin{cases}-1-x>0\\ \frac{1}{2}x-1<0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3>0\\ x-2>0\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{1}{2}x+1>0\\ 2-x>0\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{1}{2}x+2<0\\ -x+3<0\end{cases}$

2. 다음 련립안같기식이 풀이를 가지지 않는다는것을 그라프를 써서 밝혀라.

1) $\begin{cases}x+3<0\\ \frac{2}{5}-\frac{2}{3}x<0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2-x<0\\ 3x+2<0\end{cases}$

련습문제

1. 다음 련립안같기식을 풀어라.

1) $\begin{cases}3(x+2)-x>0\\ 5x+4(x-1)>0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+1+6(x-1)\le 0\\ 3(2x-1)+9x\ge 0\end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x-2(x-3)<x-5 \\ 4(x-1)-2(x-5)>0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 8x-5\le \frac{1}{2}(x+5) \\ 3(2x-1)>4x-7 \end{cases}$

2. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{x-1}{4}<1 \\ \frac{1}{4}(x-2)\le x+\frac{2}{3} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{7-2x}{2}-3<\frac{3+4x}{5}-4 \\ \frac{5}{3}x<3(x-4) \end{cases}$

3. 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $3\le 5x-1\le 4$ 2) $1<\frac{2x-1}{2}<2$

3) $3\le 4x+2\le 15$ 4) $-1<2+3x\le 3$

4. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x>3(x-1)+6 \\ x-1\ge 3x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{3}>\frac{x-1}{2}+1 \\ \frac{1}{3}(x-1)\ge x+\frac{2}{3} \end{cases}$

5. 안갈기식 $4x+1>x+7$, $3x+5>5(x-1)$, $\frac{x+2}{2}<\frac{x+3}{3}-\frac{1}{6}$ 의 풀이모임들을 각각 A, B, C라고 할 때

1) A∩B, B∩C, A∩C를 풀이모임으로 가지는 련립안갈기식을 각각 하나씩 써라.

2) B∩A, C∩B를 구하여라.

6. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 4x+1<3x+5 \\ x+3\ge 0 \\ -x\le -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+3>-5-x \\ -x+1>0 \\ -1\le x \end{cases}$

7. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 4x+3<5x-1 \\ 2x+1=12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(1-x)+5>3x-3 \\ 2x+3=10 \end{cases}$

제3절. 련립안갈기식의 응용

례 1. 한 아동단원이 고개너머로 련락을 갔다. 고개를 오를 때에는 평지에서보다 1시간에 0.5km씩 적게 가서 2시간에 9km보다 적게 갔고 고개를 내릴 때에는 평지에서보다 1시간에 1km씩 더 가서 3시간에 15km이상 갔다. 평지에서는 1시간에 몇km씩 갔겠는가?

(풀이) 평지에서의 속도를 x(km/h)라고 하면 올리막길에서의 속도는 $(x-0.5)$(km/h), 내리막길에서의 속도는 $(x+1)$(km/h), 오를 때에는 2시간에 9km보다 적게 갔으므로 조건에 의하여

$$2(x-0.5)<9 \qquad ①$$

내릴 때에는 3시간에 15km이상 갔으므로 조건에 의하여

$$3(x+1)\geq 15 \qquad ②$$

이리하여

$$\begin{cases} 2(x-0.5)<9 \\ 3(x+1)\geq 15 \end{cases}$$

를 풀어야 한다.

이 련립안갈기식을 풀면

$$4\leq x<5$$

즉 $[4, 5)$

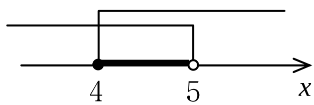


그림 2－12

답. 평지에서는 1시간에 4km이상, 5km보다 적게 갔다.

문 제

1. 어떤 옹근수의 3배에 2를 더하면 －1보다는 작은 수가 되고 또 －7에서 그 옹근수를 덜면 －4이하의 수가 나온다. 이 옹근수를 구하여라.

2. 한 최우등생이 매일 수학문제를 풀고있다. 만일 하루에 계획했던것보다 한 문제씩 더 풀면 15일간에 90문제이상 풀게 되고 하루에 계획했던것보다 두 문제씩 더 풀면 20일간에 거의 150문제를 풀게 된다. 하루에 계획했던 문제수는 얼마인가?

3. 농도가 5%인 소금물 100g이 있다. 여기에 물을 얼마 넣어야 농도가 2%와 4%사이에 있겠는가?

례 2. 물 6L와 농약 4L를 섞은 혼합물가운데서 1L가 0.9kg을 넘고 0.96kg은 못되였다고 한다. 농약 1L는 몇kg이겠는가? 물 1L는 1kg이다.

(풀이) 농약 1L가 $x$kg이라고 하자. 그러면 물과 농약을 섞은것은 10L이고 그것이 $(6\cdot1+4x)$kg이므로 문제의 조건에 의하여

$$0.9<\frac{6+4x}{10}<0.96$$

이 안갈기식은 련립안갈기식

$$\begin{cases}0.9<\dfrac{6+4x}{10}\\ \dfrac{6+4x}{10}<0.96\end{cases}$$

과 같으므로 이것을 풀면

$$0.75<x<0.9$$

를 얻는다.

답. 0.75kg을 넘고 0.9kg은 못된다.

례 3. 어떤 학생이 한동안 매일 책을 같은 페지씩 읽어왔는데 최근에 와서 하루에 그전보다 5페지씩 더 읽어서 1주일동안에 245페지를 읽었다고 한다. 만일 하루에 그전보다 10페지씩 더 읽었더라면 15일동안에 590페지 되는 책을 다 읽을수 있었겠는가?

(풀이) 그전에 하루에 읽던 페지수를 x라고 놓으면 최근 1주일동안에 읽은것은 $7(x+5)$페지인데 그것이 245페지이므로

$$7(x+5)=245$$

하루에 10페지씩 더 읽는다면 15일동안에는 $15(x+10)$ 페지 읽게 되고 그것이 590페지이상 되여야 하므로

$$15(x+10)\geq 590$$

이리하여 련립안같기식

$$\begin{cases}7(x+5)=245\\15(x+10)\geq 590\end{cases}$$

을 얻는데 우의 방정식의 풀이는

$$x=30$$

이고 그것이 아래 안같기식에 맞으므로 590페지 되는 책을 다 읽을수 있다.

답. 다 읽을수 있다.

문 제

1. 어떤 자연수의 2배에 4를 더한 합을 4로 나눈 상은 10이상, 11이하이다. 이 자연수를 구하여라.
2. 학생들이 등산을 떠났는데 목적지까지의 거리는 13.5km이상이고 15km는 못된다고 한다. 학생들은 처음 1시간에 4km 가고 그다음 2시간은 좀 더 빨리 가서 3시간만에 목적지에 도달하였다. 마지막 2시간에 학생들은 1시간에 얼마씩 갔겠는가?
3. 세멘트 2바께쯔와 모래 3바께쯔를 잘 섞었는데 혼합물 1바께쯔가 12kg이상, 13kg이하라고 한다. 세멘트 1바께쯔가 15kg이라면 모래 1바께쯔는 몇kg인가?

련습문제

1. 어떤 옹근수에 1을 더한것이 5에서 그 옹근수를 던것보다 크다. 또 그 옹근수에서 2를 던것은 그 옹근수의 2배보다 작다. 그 옹근수를 구하여라.
2. 한 보이라에서 무연탄을 지금보다 하루에 2t씩 절약하면 4일동안에 때는 량이 40t 못되고 1t씩 절약하면 5일동안에 때는 량이 40t이상이라고 한다. 지금 하루에 때는 량은 얼마인가?

3. 한 옹근수의 2배에서 10을 던것은 5에서 그 옹근수를 던것보다 크다. 그런데 그 옹근수의 2배에서 1을 던것은 그 옹근수에 3을 더한것과 같다고 한다. 이런 옹근수가 있는가?

4. 어떤 자동차가 1시간에 80km씩 3시간 달리다가 그다음 2시간은 좀 더 빨리 달렸다. 그리하여 5시간에 달린 거리가 410km이상이고 420km미만이였다. 마지막 2시간에는 1시간에 얼마씩 달렸는가?

5. 5t 싣는 자동차로 비료를 실어나르고있다. 만일 계획한것보다 두번 더 실어나르면 90t이상의 비료를 나를수 있다. 또 계획한것보다 한번 적게 실어나르면 80t이 못된다고 한다. 자동차로 비료를 몇번이나 실어나르려고 계획하였는가?

6. 700개의 물건을 1상자에 15개씩 넣으면 물건이 3상자분이상 남는다. 만일 1상자에 20개씩 넣으면 8개이상의 빈 상자가 남는다고 한다. 상자가 몇개인가?

7. 어떤 3각형의 제일 큰 변의 길이는 5cm이고 다른 두 변의 길이의 차는 1cm이다. 그리고 세 변의 길이는 모두 옹근수이다. 3각형의 세 변의 길이를 구하여라.

복습문제

1. 다음 련립안같기식이 풀이를 가지지 않는다는것을 수축을 리용하여 밝혀라.

1) $\begin{cases} x-1>5 \\ 2x+1<3 \end{cases}$ 　　 2) $\begin{cases} 3-x<2x \\ 4x-3<x-6 \end{cases}$

2. 다음 련립안같기식의 풀이모임을 구간으로 표시하여라.

1) $\begin{cases} x>10 \\ x>9 \end{cases}$ 　　 2) $\begin{cases} x\le -3 \\ x<0 \end{cases}$ 　　 3) $\begin{cases} x>-1 \\ x\le 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x>0 \\ x<3 \end{cases}$ 　　 5) $\begin{cases} x\ge 3 \\ -x\le -3 \end{cases}$ 　　 6) $\begin{cases} x>4 \\ x\le 5 \end{cases}$

3. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 2x-3>3x-5 \\ 5x>4(x-1)+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-(x-4)<6 \\ x>3(2x-1)+18 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{x-1}{2}\geq 0 \\ \frac{x-2}{5}<x-\frac{2}{3} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x-7<3(2x-1) \\ 8x-5>\frac{1}{2}(x+5) \end{cases}$

4. 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} 7x+3<5x-19 \\ 4x+1\leq 22-3x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 17x+5(x+0.6)<3x \\ 2(3.5-x)+5(2x+2.4)>26-x \end{cases}$

5. 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $2x-1<5-6x<1-3x$ 2) $\frac{x+1}{2}\leq 4-x\leq x+3$

6. 다음 련립안갈기식의 자연수풀이를 구하여라.

1) $\begin{cases} 5(x+1)\leq 2x+41 \\ 3x+7<6x+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(x+3)>3(x-3) \\ 4x-5\geq 2x+19 \end{cases}$

7. $m>2$일 때 다음 련립안갈기식을 풀어라.

1) $\begin{cases} m(mx+1)<m(m^2+1) \\ 3x-1>x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} m^2x+x>m^3+m \\ 5(x-1)<2x+4 \end{cases}$

8. $a<0$일 때 다음 련립안갈기식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2ax+2x<2(1+x) \\ 2x-1\geq x+3 \end{cases}$$

9. 분자와 분모의 합이 80인 다 약분한 분수가 있다. 이 분수를 소수로 고치고 소수점 첫째 자리아래를 잘라버리면 0.7이 된다. 이 분수를 구하여라.

10. 8%짜리 용액 200g이 있다. 여기에 물을 얼마 넣어야 4%와 5% 사이의 용액이 되겠는가?

11. 뜨락또르가 1시간에 5km씩 더 달리면 3시간에 간 거리가 75km 이상으로 되고 만일 1시간에 2km씩 적게 달리면 4시간에 간 거리가 80km이하로 된다. 이 뜨락또르는 1시간에 얼마씩 달리고 있는가?

12. 학습장 260권과 연필 400자루를 학생들에게 나누어주려고 한다. 매 학생에게 학습장을 6권씩 주면 10권이상 모자라고 연필을 8자루씩 주면 40자루이상 남는다고 한다. 학생이 몇명인가?

제3장. 여러마디식과 방정식

제1절. 여러마디식의 나누기

1. 여러마디식의 나누기

알아보기 277÷12에서 상과 나머지를 말하여라.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;\;23 \\ \cline{2-2}
12 & 277 \\
 & 24 \\ \cline{2-2}
 & \;\;37 \\
 & \;\;36 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;\;1
\end{array}
$$

여러마디식의 나누기도 수의 나누기와 류사한 방법으로 한다.

$(10x^3-41x^2+43x-9)\div(2x^2-7x+4)$의 계산과정을 보자.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\;\; 5x-3 \quad (\text{상}) \\ \cline{2-2}
2x^2-7x+4 & 10x^3-41x^2+43x-9 \\
 & 10x^3-35x^2+20x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\;\;\, -6x^2+23x-9 \\
 & \qquad\;\;\, -6x^2+21x-12 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 2x+3 \quad (\text{나머지})
\end{array}
$$

례 1. $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3}$를 계산하여라.

(풀이)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 4x + 3 \\ \hline x^2-4x+3 & x^4 \quad -10x^2 \quad +9 \\ & x^4-4x^3+3x^2 \\ \hline & 4x^3-13x^2 \quad +9 \\ & 4x^3-16x^2+12x \\ \hline & 3x^2-12x+9 \\ & 3x^2-12x+9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$(x^4-10x^2+9)\div(x^2-4x+3)=x^2+4x+3$$

이때 x^4-10x^2+9 는 x^2-4x+3 으로 **완제된다**고 말한다.

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

 1) $(2x^2+11x+5)\div(x+5)$　　2) $(x^3-5x^2-4x+2)\div(x-2)$

 3) $(6x^3-3x^2+2x-1)\div(3x^2+1)$　　4) $(x^4-7x^2)\div(x^2+6x-5)$

2. $3x^3-8x^2-5x+1$을 $x-2$로 나눈 상이 $3x^2-2x-9$이다. 나머지를 구하여라.

3. $4x^4+13x-9$를 나눈 상이 x^2+x-1이고 나머지가 $x-1$이다. 나누는 식을 구하여라.

호너의 도식

$(3x^3-8x^2+2x-1)\div(x-2)$의 계산과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2-2x-2 \\ \hline x-2 & 3x^3-8x^2+2x-1 \\ & 3x^3-6x^2 \\ \hline & -2x^2+2x \qquad -2=-8+2\cdot 3 \\ & -2x^2+4x \\ \hline & -2x-1 \qquad -2=2+2\cdot(-2) \\ & -2x+4 \\ \hline & -5 \qquad -5=-1+2\cdot(-2) \end{array}$$

즉 $3x^3-8x^2+2x-1=(3x^2-2x-2)(x-2)-5$

이 과정을 도식화하면 다음과 같다.

2	3	−8	2	−1
	↓	+	+	+
		2 · 3	2 · (−2)	2 · (−2)
	3 ↗	−2 ↗	−2 ↗	−5

여기서 3, −2, −2는 상의 매 마디의 곁수들이고 −5는 나머지이다.
일반적으로 다음과 같이 쓸수 있다.

> $(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)\div(x-a)$ 에서 상이 $b_0x^2+b_1x+b_2$, 나머지가 b_3 이라면
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | a | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 |
> | | ↓ | + | + | + |
> | | | ab_0 | ab_1 | ab_2 |
> | | $a_0=b_0$ ↗ | b_1 ↗ | b_2 ↗ | b_3 |
>
> 이 도식을 **호너의 도식**이라고 부른다.

례 2. 다음 식을 계산하여라.

$$(x^3+x^2-14x-29)\div(x+2)$$

(풀이)

−2	1	1	−14	−29
	↓	+	+	+
		(−2) · 1	(−2) · (−1)	(−2) · (−12)
	1 ↗	−1 ↗	−12 ↗	−5

따라서 상은 x^2-x-12, 나머지는 −5

문 제

다음 식을 계산하여라. (1−2)

1. 1) $(2x^2+x-10)\div(x-2)$ 2) $(4x^2+5x+2)\div(x+3)$

3) $(x^2-7x-6)\div(x-2)$

2. 1) $(x^3-5x^2+7x-2)\div(x-2)$ 2) $(5x^3-7x^2-12x-3)\div(x-3)$

3) $(x^3-7x^2+14x-8)\div(x-1)$

알아보기 1. x^2-4는 $x-2$로 완제된다. 이때 x^2-4에 $x=2$를 갈아넣은 2^2-4는 얼마인가?

2. $3x^3-8x^2+2x-1=(3x^2-2x-2)(x-2)-5$ 에서 $x=2$를 $3x^3-8x^2+2x-1$ 에 갈아넣으면 어떤 수가 나오는가?

> $\mathrm{A}(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 를 $x-e$로 나눈 나머지는
> $$\mathrm{R}=\mathrm{A}(e)=a\cdot e^3+b\cdot e^2+c\cdot e+d$$
> 와 같다.

이것은 모든 여러마디식에서도 성립한다.

이것을 **나머지정리**라고 부른다.

례 3. $\mathrm{A}(x)=x^3-5x^2-4x+2$를 $x-2$로 나눈 나머지를 구하여라.

(풀이) 나머지정리에 의하여

$$\mathrm{R}=\mathrm{A}(2)=2^3-5\cdot2^2-4\cdot2+2=8-20-8+2=-18$$

문 제

1. 다음 나누기의 나머지를 구하여라.

1) $(x^3+5x^2-4x+2)\div(x+5)$ 2) $(2x^4-5x+3)\div(x-3)$

3) $(3x^3-x^2+5x-7)\div(x+3)$ 4) $(x^3-8x^2-7x+21)\div(x-2)$

2. $a^{73}+b^{73}$은 $a+b$로 완제된다는것을 증명하여라.

3. $a^{13}-b^{13}$은 $a-b$로 완제된다는것을 증명하여라.

알아보기 x^3-3x^2+3x-9에 $x=3$을 넣으면 그 값이 0이다. 이때 x^3-3x^2+3x-9가 $x-3$으로 완제되는가를 알아보아라.

> ax^3+bx^2+cx+d 에 $x=e$ 를 넣었을 때 그 값이 0이면 이 여러마디식은 $x-e$ 로 완제된다.

이것은 모든 여러마디식에서도 성립한다.

이것을 **인수정리**라고 부른다.

례 4. $x^3-5x^2-4x+20$은 $x-2$로 완제되는가?

(풀이) $2^3-5\cdot 2^2-4\cdot 2+20=0$

따라서 주어진 여러마디식은 $x-2$로 완제된다.

례 5. $3x^5-224x^3+742x^2+5x+50$은 $x-5$를 인수로 가지는가?

(풀이) $3\cdot 5^5-224\cdot 5^3+742\cdot 5^2+5\cdot 5+50=0$

따라서 주어진 여러마디식은 $x-5$를 인수로 가진다.

문 제

1. $\mathrm{A}(x)=6x^4+5x^3-38x^2+5x+6$일 때 다음 식들가운데서 $\mathrm{A}(x)$의 인수로 되는것을 찾아보아라.

   $x+1$,　　$x-2$,　　$x+3$,　　$x-4$
2. $3x^3-x^2+5x-n$을 $x+3$으로 나눈 나머지가 -100이다. n을 구하여라.
3. $\mathrm{A}(x)=x^3+(2a+1)x^2+(a^2-2a-1)x+a^2-9$는 $x+1$로 완제된다. a의 값을 구하여라.

2. 여러마디식의 인수분해

알아보기 여러마디식 x^3-5x+4의 상수마디 4의 약수 1, -1, 2, -2, 4, -4들을 여러마디식에 넣어보아라. 그 값이 0이 되는 약수가 있는가?

> 여러마디식 ax^3+bx^2+cx+d 의 상수마디 d의 약수들가운데 $a\cdot d_1^3+b\cdot d_1^2+c\cdot d_1+d=0$ 인 약수 d_1이 있으면
>
> $$ax^3+bx^2+cx+d=(a_1x^2+b_1x+c_1)(x-d_1)$$
>
> 로 된다.

례. $A(x)=x^3+x^2-14x-24$를 인수분해하여라.

(풀이) -24의 약수: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±24

$$(-2)^3+(-2)^2-14\cdot(-2)-24=-8+4+28-24=0$$

-2	1	1	-14	-24
		-2	2	24
	1	-1	-12	0

따라서 $A(x)=(x+2)(x^2-x-12)$

$x^2-x-12=(x-4)(x+3)$이므로

$A(x)=x^3+x^2-14x-24=(x+2)(x-4)(x+3)$

문 제

1. 다음 여러마디식을 인수분해하여라.

1) x^3-7x+6　　2) x^3-2x^2-9

3) $x^4-x^3-7x^2+x+6$　　4) $x^4+2x^3-x^2+2$

2. x에 관한 여러마디식 $A(x)$가 $x-\alpha$ 및 $x-\beta$로 나머지없이 나누어지면 $A(x)$는 $(x-\alpha)(x-\beta)$로도 나머지없이 나누어진다. $(\alpha\neq\beta)$ 증명하여라.

련습문제

1. 다음 식을 계산하여라.

1) $(2x^4+3)\div(x^2-2x+7)$　　2) $(-9x^2-x+7)\div(x-3)$

3) $(x^6+8x^5+12x^4-2x^3+9x+18)\div(x^2+2x-3)$

4) $(x^5-4x^3+7x^2+5)\div(x+2)$

2. $A(x)=x^4+2x^3-x+3$을 $B(x)$로 나눈 상이 2차식이다. $B(x)$는 몇차식인가?

3. $A(x)=x^4+x^3-10x^2+ax+b$는 $x-2$와 $x-3$으로 완제된다. a, b를 구하여라.

4. $A(x)=2x^3-3x^2-ax+b$를 $x+1$로 나눈 나머지는 7이고 $x-1$로 나눈 나머지는 5이다. a, b를 구하여라.

5. x에 관한 여러마디식을 $x-7$로 나누면 나머지가 13이고 $x-9$로 나누면 나머지가 17이다. 이 여러마디식을 $(x-7)(x-9)$로 나누면 나머지는 얼마인가?

6. 다음 사실을 증명하여라.

1) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$은 $a+b$로 완제된다.　　2) $a^{2n}-b^{2n}$은 $a+b$로 완제된다.

3) $a^{2n-1}-b^{2n-1}$은 $a-b$로 완제된다.

7. 인수분해하여라.

1) a^5+b^5　　2) a^9-b^9　　3) a^6+b^6

4) $(a+b)^3+(a-b)^3$　　5) $(a+b)^3-(a-b)^3$

8. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $x^4-3x^3+x^2+3x-2$　　2) $x^3+6x^2+11x+6$

3) $x^{10}+2x^5+1$

제2절. 2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프와 2차방정식

1. 2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프

2차식 $y=ax^2+bx+c$에 x의 값을 주면 y가 정해진다. 이때 점 (x, y)들의 모임을 **2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프**라고 부른다.

2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프도 1차식 $y=ax+b$의 그라프를 그리는것과 류사한 방법으로 그린다.

례 1. $y=x^2$의 그라프를 그려라.

(풀이)

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	4	1	0	1	4	…

자리표평면에 점 …, (−2, 4), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), … 들을 찍고 미끈한 선으로 이으면 그리려는 곡선이 얻어진다.(그림 3−1)

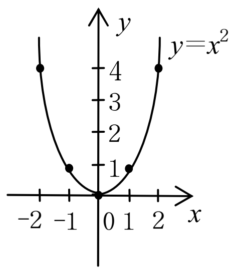


그림 3−1

알아보기 $y=x^2$의 그라프를 y축의 정방향으로 2만큼 평행이동하면 $y=x^2+2$의 그라프가 얻어진다고 말할수 있는가?(그림 3−2) 매 x점에서 x^2+2와 x^2의 차가 어떤가?

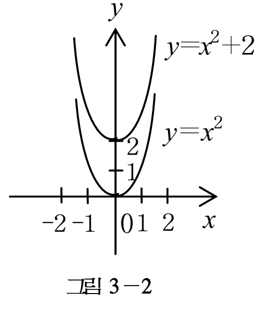


그림 3−2

2차식 $y=x^2+a$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프를 y축의 정방향으로 a만큼 평행이동하면 얻어진다.

문 제

다음 2차식의 그라프를 그려라.

1) $y=x^2+3$ 2) $y=x^2-5$

탐 구

1) $y=-x^2$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프와 어떤 관계에 있는가?

2) $y=-x^2+2$, $y=-x^2-3$의 그라프는 어떻게 그리면 되겠는가?

례 2. $y=x^2+4x+3$의 그라프를 그려라.

(풀이) 표를 만들면 다음과 같다.

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
y	…	0	-1	0	3	8	…

점(x, y)를 찍고 미끈한 선으로 이으면 그림과 같은 그라프가 얻어진다.

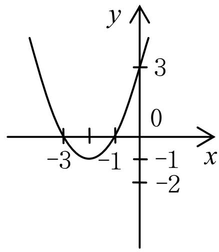


그림 3－3

임의의 2차식 $y=ax^2+bx+c$의 그라프도 이런 방법으로 그리면 된다.

문 제

다음 2차식의 그라프를 그려라.

1) $y=-x^2-4x+3$ 2) $y=x^2+4$ 3) $y=-x^2-4x$

2. 2차방정식

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 모양으로 표시되는 방정식을 **2차방정식**이라고 부른다. 여기서 a, b, c는 상수이다.

1) $x^2+a=0$ 모양의 2차방정식

례 1. $x^2-4=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2-4=0$

$x^2=4$

이로부터 2제곱하여 4가 되는 수는 2와 −2이므로

$x=2,\ x=-2$

2차식 $y=x^2-4$의 그라프를 그리면 그림 3−4와 같다.

이때 x축과의 사귐점의 x자리표는 −2와 2이다.

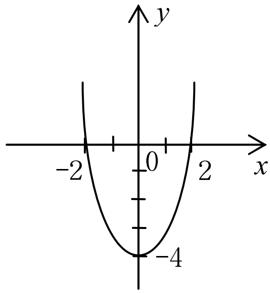


그림 3−4

답. $\{-2,\ 2\}$

례 2. $x^2+4=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2+4=0$

$x^2=-4$

0 아닌 어떤 수를 2제곱하면 늘 정수이므로 −4가 될수 없다.

즉 방정식 $x^2+4=0$은 풀이가 없다.

$y=x^2+4$의 그라프를 그리면 그라프는 x축과 사귀지 않는다.

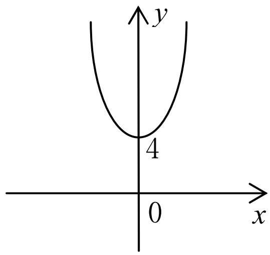
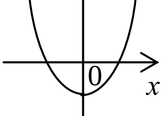
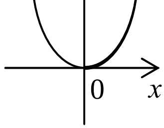


그림 3−5

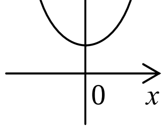
2차식의 그라프와 x축과 사귀는 점의 수는 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이의 개수와 같다.



풀이는 2개



풀이는 1개



풀이는 없음

문 제

다음 2차방정식을 풀어라.

1) $x^2-36=0$　　2) $2x^2-18=0$　　3) $3x^2-48=0$

2) $x^2+bx=0$ 모양의 방정식

례 3. $x^2+5x=0$을 풀어라.

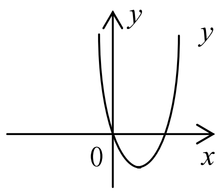
(풀이) $x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0$

$x=0$, $x+5=0$

즉 $x=0$, $x=-5$

답. $\{0, -5\}$

$ax^2+bx=0$ $(a, b\neq 0)$모양의 방정식은 늘 풀이가 있다.



$y=ax^2+bx$ $(a, b\neq 0)$의 그라프는 늘 x축과 두 점에서 사귄다.

문 제

다음 2차방정식을 풀어라.

1) $x^2+3x=0$　　2) $3x^2+7x=0$

3) $-9x^2+5x=0$　　4) $-5x^2-27x=0$

$x^2=bx+c$모양의 2차방정식은 그라프에 의하여 풀수도 있다.

례 4. $x^2-3x+2=0$을 그라프에 의하여 풀어라.

(풀이) 주어진 방정식을 $x^2=3x-2$로 놓고 $y_1=x^2$, $y_2=3x-2$로 표시하자.

두 그라프의 사귐점은 (1, 1), (2, 4)이다.

$x=1$, $x=2$일 때 $x^2=3x-2$이다.

답. $\{1, 2\}$

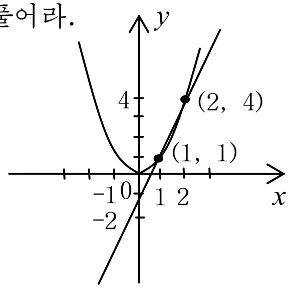


그림 3-6

문 제

다음 방정식을 두 그라프의 사귐점을 구하는 방법으로 풀어라.

1) $x^2-5x+6=0$　　　　　2) $x^2+3x+2=0$

3) 인수분해된 안같기식의 풀이

인수분해된 안같기식은 그라프를 대강 그리면 풀이를 쉽게 구할수 있다.

례 5. 안같기식 $(x+2)(x-2)\geqslant 0$의 풀이를 구하여라.

(풀이) $y=(x+2)(x-2)$의 그라프는 x축과 $x=-2$, $x=2$에서 사귄다. $(x+2)(x-2)$의 값은 $x<-2$에서 정수, $-2<x<2$에서 부수, $x>2$에서 정수라는것을 알수 있다. 그리하여 $y=(x+2)(x-2)$의 그라프를 대강 그리면 그림 3-7과 같다. 따라서

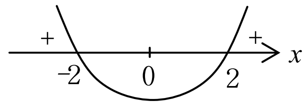


그림 3-7

$(x+2)(x-2)\geqslant 0$의 풀이는 $(-\infty, -2]$, $[2, +\infty)$이다.

답. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

례 6. 안같기식 $x^3-3x+2\geqslant 0$을 풀어라.

(풀이) 왼변을 인수분해하면

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

$y=(x-1)^2(x+2)$의 그라프는 x축과 $x=-2$, $x=1$에서 사귄다. 여기서 $(x-1)^2\geqslant 0$이므로 $(x-1)^2(x+2)$의 값은 $x<-2$일 때에만 부수이고 $-2<x<1$, $x>1$일 때에는 정수이다. 그리하여 $y=x^3-3x+2$의 그라프를 그리면 그림 3-8과 같다.

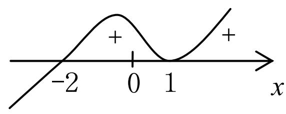


그림 3-8

따라서 $(x-1)^2(x+2)\geqslant 0$의 풀이는 $x\geqslant -2$

답. $[-2, +\infty)$

문 제

다음 안갈기식의 그라프를 대강 그리고 풀어라.

1) $4(x+3)(x-1)\geqq 0$ 2) $-\frac{3}{4}(x-2)(5x+1)^2\geqq 0$

3) $-2(x+1)(2x-1)(x-3)\geqq 0$

련습문제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-81=0$ 2) $3x^2-12=0$

3) $3x^2-75=0$ 4) $-5x^2+180=0$

2. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-x=0$ 2) $x^2+x=0$ 3) $x^2-2x=0$ 4) $x^2+2x=0$

3. 그라프를 그려서 다음 방정식의 풀이의 개수를 구하여라.

1) $x^2+7x=0$ 2) $2x^2+4x+1=0$ 3) $2x^2-4x-1=0$

4. 다음 안갈기식을 풀어라.

1) $(3x+1)(2x-3)\geqq 0$ 2) $4(2x-3)(5x-7)\leqq 0$

3) $(2x-1)^2(3x+5)^3\geqq 0$

복습문제

1. 다음과 같이 말하면 옳은가?

1) 《3차여러마디식을 1차여러마디식으로 나눈 상은 2차여러마디식이고 나머지는 상수이다.》

2) 《3차여러마디식을 2차여러마디식으로 나눈 나머지는 늘 1차여러마디식이다.》

3) 《여러마디식 $\mathrm{A}(x)$가 $x-a$로 완제되면 $\mathrm{A}(x)$는 $x-a$를 인수로 가진다.》

4) 《옹근수 a가 여러마디식 $\mathrm{A}(x)$의 상수마디의 약수이면 $\mathrm{A}(x)$는 $x-a$로 완제된다.》

5) 《여러마디식 $\mathrm{A}(x)$가 $(x-a)(x-b)$로 완제되면 $\mathrm{A}(a)=\mathrm{A}(b)$이다.》

2. 다음 식을 계산하고 그것을 주어진 식과 상, 나머지사이의 관계식으로 표시하여라.

1) $(3x^4+5x+2)\div(x^2-2x+1)$ 2) $(x^4-3x^2+x-9)\div(x^3-x+2)$

3. $A(x)=x^4-5x^3-x^2+ax+b$가 x^2-5x-6으로 완제된다. a와 b의 값을 구하여라.

4. 여러마디식 $A(x)$를 x^2-1로 나누면 상이 x, 나머지가 $3x-5$이다. $x-1$로 나누면 나머지가 얼마이겠는가?

5. 3차여러마디식 $A(x)$를 x^2-1로 나누면 나머지가 $2x-4$이고 x^2-9로 나누면 나머지가 $10x-20$이다. $A(x)$를 구하여라.

6. 여러마디식 $A(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 3이고 그 상을 $x+3$으로 나누면 나머지가 -1이다. $A(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 얼마인가? 또 x^2+x-6으로 나눈 나머지를 구하여라.

7. 여러마디식 $A(x)$를 x^2+1로 나눈 상은 x^2-x-1이고 나머지는 $x+1$이다. 여러마디식 $A(x)$를 x^2-1로 나눈 상과 나머지를 구하여라.

8. 다음 여러마디식을 인수분해하여라.

1) x^3-5x^2+4 2) x^4+2x^3-3

3) x^5-2x^3-1 4) $x^5+x^4-9x^3-5x^2+16x+12$

9. 다음 2차방정식을 풀어라.

1) $3x^2-75=0$ 2) $2x^2+50x=0$

3) $5x^2+155x=0$ 4) $-3x^2+125x=0$

10. 2차식의 그라프를 써서 다음 2차방정식의 풀이의 개수를 구하여라.

1) $x^2+2x-7=0$ 2) $x^2-9x+5=0$

11. 다음 안같기식을 그라프로 풀어라.

1) $x^2+3x-10>0$ 2) $x^2-3x-10>0$

3) $x^2+4x-12>0$ 4) $x^2-4x-12>0$

제4장. 유리식

제1절. 분수식

1. 옹근식

수나 변수들사이에 더하기나 덜기, 곱하기가 들어있는 식을 **옹근식**이라고 부른다.

례 1. $2ab$, $a(a+3)$, $ax+by$, $a^2b(2+a)^2$, $(x+1)(x^2-1)$ 등은 다 옹근식이다.

$\frac{a+b}{2x}$는 옹근식이 아니다.

수로의 나누기가 들어있는 식 $\frac{3x+1}{2}$은 그 수의 거꿀수와의 곱하기 $\frac{1}{2}(3x+1)$과 같으므로 옹근식에 넣는다.

여러마디식이 아닌 옹근식은 다 여러마디식으로 고칠수 있다.

례 2. 1) $3a^2+2a(a-1)=3a^2+2a^2-2a=5a^2-2a$

2) $2a(a^2+3)=2a^3+6a$

3) $(3x-y)^3=27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$

4) $(7a+b)(9a^2-7ab+b^2)=63a^3-49a^2b+7ab^2+9a^2b-$
$-7ab^2+b^3=63a^3-40a^2b+b^3$

문 제

1. 다음 식에서 옹근식을 골라내여라.

1) $7ab$　　2) $a(a-3)$　　3) $\frac{x}{3}$

4) $\frac{x}{65}$　　5) $\frac{x^2-3x+1}{4}$　　6) $\frac{x^2-y}{x+y}$

2. 다음 옹근식을 여러마디식으로 고쳐라.

1) $3x^2(2x+1)$ 2) $2ab(a+3b)^3$ 3) $a^2b(a+2)^3$

4) $ab^2(3-2a)^3$ 5) $(x^2-x+2)(3x^2+2x-4)$

6) $(2x^2+x-3)(x-1)$

3. 다음 옹근식을 인수분해하여라.

1) x^2+5x+6 2) $4a^2-9b^2$

3) $x^2+x-6-(x-2)^2$ 4) x^2y-xy^2

옹근수에서와 마찬가지로 옹근식의 약수, 배수를 생각한다.

> 옹근식 A, B에 대하여
>
> $$A=B \cdot C$$
>
> 인 옹근식 C가 있을 때 B를 A의 **약수**, A를 B의 **배수**라고 부른다.

A＝1・A=A・1이므로 1을 모든 옹근식의 약수로 본다. 1은 그자체의 약수이다. A도 그자체의 약수이다.

례 3. $x^2-1=(x+1)(x-1)$ 이므로

$x+1$은 x^2-1의 약수

x^2-1은 $x+1$의 배수이다.

x^2-1자체도 약수이다.

례 4. 다음 옹근식의 약수를 다 써라.

1) $x(x^2-1)$ 2) $2(x+1)^3$

(풀이) 1) $x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$ 이므로 그의 약수는

$1,\ x,\ x+1,\ x-1,\ x(x+1),\ x(x-1),\ x^2-1,\ x(x^2-1)$

2) $2(x+1)^3=2(x+1)(x+1)^2$ 이므로 그의 약수는

$1,\ 2,\ x+1,\ (x+1)^2,\ (x+1)^3,\ 2(x+1),\ 2(x+1)^2,\ 2(x+1)^3$

문 제

1. 다음 옹근식의 약수를 다 구하여라.

1) x^3 2) xyz 3) $(x+3)(x-4)$

4) $(x+y)^2$ 5) $(x+y)(x-y)^2$ 6) $a(a+b)(a-b)^2$

2. 다음것이 옳은가?

1) $x+1$은 x^3-1의 약수　　2) $x-1$은 x^3-1의 약수

3) x^2-9는 $x-3$의 배수　　4) x^2-9는 $x+3$의 배수

5) x^3+1은 $x+1$의 배수　　6) x^3+1은 x^3+1의 약수

3. 다음 옹근식의 약수를 구하여라.

1) x^2-16　　2) $x^2+7x+12$　　3) x^2-5x+6

4) a^2-3a-4　　5) $3a^2+5a-2$　　6) $6x^2+7xy-3y^2$

옹근식에서도 옹근수에서와 비슷하게 공통약수와 공통배수를 생각한다.

찾기 두 옹근식 x^2y, xy^2의 공통약수와 공통배수를 찾아보아라.

> 몇개의 옹근식들의 공통약수들가운데서 차수가 제일 높은것을 그 옹근식들의 **최대공통약수**라고 부른다.
>
> 그리고 공통배수들가운데서 차수가 제일 낮은것을 **최소공통배수**라고 부른다.

옹근식들의 최대공통약수와 최소공통배수도 옹근수에서와 비슷한 방법으로 구할수 있다.

례 5. $12x^2y^3$과 $18x^4yz$의 최대공통약수와 최소공통배수를 구하여라.

(풀이) $12x^2y^3=2\cdot\boxed{2\cdot3}\cdot\boxed{x^2\cdot y}\cdot y^2$

$18x^4yz=\boxed{2\cdot3}\cdot3\cdot\boxed{x^2\cdot y}\cdot x^2\cdot z$

이므로 최대공통약수는 $\boxed{2\cdot3}\cdot\boxed{x^2y}=6x^2y$

$12x^2y^3=\boxed{2^2}\cdot3\cdot x^2\cdot\boxed{y^3}$

$18x^4yz=2\cdot\boxed{3^2}\cdot\boxed{x^4}\cdot y\cdot\boxed{z}$

이므로 최소공통배수는 $2^2\cdot3^2\cdot x^4\cdot y^3\cdot z=36x^4y^3z$

례 6. 다음 두 옹근식들의 최대공통약수와 최소공통배수를 구하여라.

$6(x+1)^2$, $\qquad 20(x^2-1)$

(풀이) $6(x+1)^2=\boxed{2}\cdot 3\cdot(x+1)^2$

$20(x^2-1)=2^2\cdot 5\boxed{(x+1)}(x-1)$ 이므로

최대공통약수는 $2(x+1)$

$6(x+1)^2=2\cdot\boxed{3}\boxed{(x+1)^2}$

$20(x^2-1)=\boxed{2^2}\cdot\boxed{5}(x+1)\boxed{(x-1)}$

이므로 최소공통배수는

$2^2\cdot 3\cdot 5(x+1)^2(x-1)=60(x+1)^2(x-1)$

문 제

1. 다음 식이 옳으면 ○, 옳지 않으면 ×로 표시하여라.

1) $24x^3y^2$, $18y^3$, $30xy^4z$의 최대공통약수는 $30x^3y^2z$

2) $ab^2(a+b)$, $2a^2b(a+b)^2$, $a^2b^2(a^2-b^2)$의 최대공통약수는 $2a^2b(a+b)^2(a-b)$

3) x^2-2x+1, x^2-7x+6, $2x^2+x-3$의 최소공통배수는 $(x-1)^2(x-6)(2x+3)$

4) x^2-3x-4, $2x^2-x-3$, $6x^2+x-5$의 최소공통배수는 $(x-4)(x+1)(2x-3)(6x-5)$

2. 다음 옹근식들의 최대공통약수를 구하여라.

1) x^2y^3, x^3y^2 $\qquad$ 2) $4x^2y$, $12xy^2$

3) $12abc$, $18a^2bc$ $\qquad$ 4) $4x^3y^2$, $3y^3$, $5xy^4z$

5) $6ab^2$, $8ab(a-b)$ $\qquad$ 6) $6(a+b)^2$, $3(a-b)^2$

3. 다음 옹근식들의 최소공통배수를 구하여라.

1) ab, bc, ac $\qquad$ 2) xy^2, yz^2, zx^2

3) $3a^2b$, $2ab^2$, $8abc$ $\qquad$ 4) $a(a+b)$, $b(a-b)$, $ab(a+b)^2$

2. 분수식과 그 뜻구역

분모에 변수가 들어있는 분수모양의 식을 그 변수에 관한 **분수식**이라고 부른다.

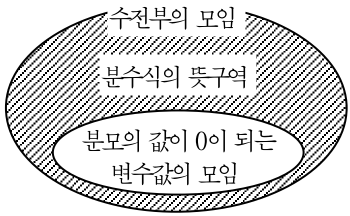
례 1. 식 $\dfrac{2a^2}{a+b}$은 a, b에 관한 분수식이고 $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x-2}{x+\dfrac{1}{x}}$는 x에 관한 분수식이다.

알아보기 옹근식은 변수의 임의의 값에 대하여 값을 가진다. 분수식 $\dfrac{3}{x}$, $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{1}{x-1}$은 x가 어떤 수일 때 값을 가지지 않는가?

식이 값을 가지는 변수값들의 모임을 그 식의 **뜻구역**이라고 부른다. 옹근식의 뜻구역은 수전부의 모임이다.

분수식의 뜻구역

분수식의 뜻구역은 수전부의 모임에서 분모의 값이 0이 되는 변수값모임을 빼버린 나머지 모임이다.



례 2. $\dfrac{3x}{2x-10}$의 뜻구역을 구하여라.

(풀이) 방정식 $2x-10=0$을 풀면 $x=5$이다.

따라서 $x=5$일 때 분수식은 뜻을 가지지 않는다. 그러므로 뜻구역은

$\{x|x\neq 5\}$

즉 $(-\infty,\ 5)\cup(5,\ +\infty)$

이것을 수축에 표시하면 그림 4－1과 같다.

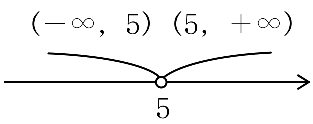


그림 4－1

례 3. $\dfrac{4x}{(x-1)(x+3)}$ 의 뜻구역을 구하여라.

(풀이) $x=1$, $x=-3$일 때 분모가 0이므로 뜻구역은 $\{x \mid x\neq 1,\ x\neq -3\}$ 즉
$(-\infty, -3)\cup(-3, 1)\cup(1, +\infty)$
이것을 수축에 표시하면 그림 4−2와 같다.

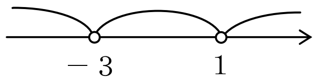


그림 4−2

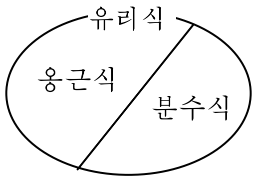
문 제

다음 식의 뜻구역을 구하고 그것을 수축에 표시하여라.

1) $\dfrac{1}{1-2x}$ 2) $\dfrac{4x}{(x-1)(x-3)}$ 3) $\dfrac{x+1}{x^2-4}$

4) $\dfrac{2}{x^2+1}$ 5) $\dfrac{5}{|x|-1}$ 6) $\dfrac{x^2-1}{2}$

수나 변수들에 더하기나 덜기, 곱하기나 나누기를 해서 얻은 식을 **유리식**이라고 부른다. 옹근식이나 분수식은 다 유리식이다.



$\dfrac{x^2+2}{x}=x+\dfrac{2}{x}$ 이므로 $x+\dfrac{2}{x}$ 도 분수식으로 본다.

문 제

1. 다음 식들가운데서 옹근식과 분수식을 각각 골라내여라.

1) a 2) $\dfrac{3}{b}$ 3) $x(x^2-1)$

4) $\dfrac{1}{2-a}$ 5) $\dfrac{3}{4}$ 6) $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)}$

2. 다음과 같이 말하면 옳은가?

1) x^2-5x+6은 유리식이 아니다.

2) $(x-1)(x^2+x+1)$은 유리식이다.

3) $x^2-x+\dfrac{1}{x}$ 은 분수식이다.

4) $x(x+3)+\dfrac{5}{x+1}$ 는 유리식이다.

련습문제

1. 다음 식들가운데서 옹근식과 분수식을 갈라내여라.

$\dfrac{2}{x}$, $\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{3}{1-2.5x}$, $\dfrac{x(x-1)}{5}$, $\dfrac{3x-1}{x^2+2x+1}$, $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x^2+1}}$

2. 다음 옹근식을 여러마디식으로 변형하여라.

1) $3x(2x+1)^2$ 2) $(5x-3)(5x+3)(2-3x)^3$

3) $(3x-2y+5)(3x-2y-5)$ 4) $(x^3-3x^2-2)(3x+2-x^2)$

3. 다음 옹근식들의 최대공통약수, 최소공통배수를 구하여라.

1) $4x^2y$, $12xy^2z$ 2) $24a^3b^2$, $18ab$, $30ab^4c$

3) x^2-xy, $xy-y^2$, x^2-y^2 4) x^2-4x+4, x^2+x-6, $2x^2-3x-2$

4. 다음 옹근식들의 최소공통배수를 구하여라.

1) $6x$, $2x^2-5x-3$, x^3-3x^2 2) x^2-6x+9, x^2+6x+9, x^2-9

3) $(a-b)(b-c)$, $(b-c)(c-a)$, $(c-a)(a-b)$

5. 다음 분수식이 값을 가지지 않는 변수값의 모임을 구하여라.

1) $\dfrac{1}{2x-3}$ 2) $\dfrac{3}{x(x-4)}$ 3) $\dfrac{x+1}{x^2-9}$ 4) $\dfrac{x}{|x|+1}$

6. 다음 식의 뜻구역을 선택하여라.

1) $\dfrac{x-\dfrac{1}{1-x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ A. $\{x|x\neq 0\}$ B. $\{x|x\neq 1\}$ C. $\{x|x\neq 0,\ x\neq \pm 1\}$

2) $\dfrac{|x|}{|x-1|-3}$ A. $\{x|x\neq 0\}$ B. $\{x|x\neq 4\}$ C. $\{x|x\neq -2\}$

D. $\{x|x\neq -2,\ x\neq 4\}$

3) $\dfrac{1-5x}{x^2+x+1}$ A. $\{x|x\neq \dfrac{1}{5}\}$ B. $\{x|x$는 모든 수$\}$ C. $\{x|x\neq 1\}$

7. 다음 분수식의 뜻구역을 구하여라. 그리고 그것을 수축에 표시하여라.

1) $\frac{2}{1-3x}$　　2) $\frac{3}{x(x-5)}$

3) $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+5)^2}$　　4) $\frac{3x-1}{(x+2)^3+1}$

제2절. 분수식의 계산

1. 분수식의 약분과 통분

분수의 성질 $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}(b\neq 0,\ c\neq 0)$ 는 수식을 다루는데 많이 써왔다. 분수식도 분수에서와 비슷한 성질을 가진다.

> 분수식의 분자, 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱해도 값이 같은 분수식이 나온다.
>
> $$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}}{\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}}\qquad(\mathrm{C}\neq 0)$$

례 1. 분수식 $\frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{2}{3}x}$ 을 분자, 분모의 마디의 곁수가 옹근수인 분수식으로 고쳐라.

(풀이) 2와 3의 최소공통배수 6을 분자, 분모에 곱하면

$$\frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{2}{3}x}=\frac{(\frac{1}{2}x+1)6}{\frac{2}{3}x\cdot 6}=\frac{3x+6}{4x}$$

알아보기 1. 분수식 $\frac{3}{x-1}$ 의 분자, 분모에 식 $x+1$을 같이 곱하면 $\frac{3(x+1)}{x^2-1}$ 을 얻는다. 이때 얻어진 분수식의 뜻구역이 처음과 같은가?

2. 우의 분수식들의 공통뜻구역에서 몇개의 변수값들을 잡고 분수식들의 값들을 구하여 비교하여라. 무엇을 알수 있는가?

분수식들의 값은 늘 그것들의 공통뜻구역에서만 생각한다.

분수식의 분자, 분모에 0이 아닌 같은 식을 곱해도 값이 같은 식이 나온다. 이때에는 식의 뜻구역이 달라질수 있다.

두 식의 공통뜻구역에서 식의 값이 늘 같으면 그 두 식은 **같은 식**이라고 부른다.

례 2. 분수식 $\frac{1}{x}$ 의 분자, 분모에 식 $x-1$을 같이 곱하면

$$\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x(x-1)}$$

그런데 분수식 $\frac{1}{x}$ 의 뜻구역은 $\{x|x\neq 0\}$

$\frac{x-1}{x(x-1)}$ 의 뜻구역은 $\{x|x\neq 0,\ x\neq 1\}$이다.

분수식의 분자, 분모를 그것들의 공통약수로 나누어 그와 같은 식으로 고치는것을 **분수식을 약분한다**고 말한다.

$$\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0,\ C\neq 0)$$

C로 약분

례 3. $\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$

$$\frac{5(x+1)}{x^2+2x+1}=\frac{5(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{5}{x+1}$$

례 4. $\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{x+1}{x}$

$$\frac{2x^2-3x-2}{2x+1}=\frac{(2x+1)(x-2)}{2x+1}=x-2$$

례 3의 약분에서는 식들의 뜻구역이 달라지지 않았다. 그러나 례 4의 약분에서는 뜻구역이 달라졌다.

문 제

1. 다음 분수식의 분자, 분모의 최대공통약수를 선택하여라.

1) $\dfrac{x}{x^2+x}$ A. x B. 없음 C. 1 D. 0

2) $\dfrac{x^2+x-6}{x(x+3)}$ A. 없음 B. x C. 1 D. $x+3$

3) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x}$ A. $x-1$ B. $x+1$ C. 1 D. 없음

2. 다음 분수식을 약분하여라.

1) $\dfrac{6x^2}{12xy}$ 2) $\dfrac{16ab^2}{24a^2b}$

3) $\dfrac{21a^2bc^2}{28ab^2c}$ 4) $\dfrac{0.6(a-2)^2}{0.8(a-2)x}$

분수에서와 마찬가지로 분수식들의 통분을 생각할수 있다.

> 분모가 서로 다른 분수식들을 분모가 같은 분수식들로 고치는것을 **분수식들을 통분한다**고 말한다.
>
> 분수식들을 통분할 때에는 보통 분모들의 최소공통배수를 공통분모로 잡는것이 좋다.

례 5. 분수식 $\frac{1}{4a^2b}$, $\frac{1}{6ab^2}$ 을 통분하여라.

(풀이) 분모들의 최소공통배수는

$12a^2b^2$

그러므로

$$\frac{1}{4a^2b}=\frac{\boxed{3b}}{4a^2b\cdot\boxed{3b}}=\frac{3b}{12a^2b^2}$$

$$\frac{1}{6ab^2}=\frac{\boxed{2a}}{6ab^2\cdot\boxed{2a}}=\frac{2a}{12a^2b^2}$$

례 6. 분수식 $\frac{1}{x^2+xy}$, $\frac{1}{y^2+xy}$ 을 통분하여라.

(풀이) 분모들의 최소공통배수는 $xy(x+y)$

그러므로

$$\frac{1}{x^2+xy}=\frac{1}{x(x+y)}=\frac{y}{xy(x+y)}$$

$$\frac{1}{y^2+xy}=\frac{1}{y(x+y)}=\frac{x}{xy(x+y)}$$

문 제

다음 분수식을 통분하여라.

1) $\frac{1}{6ab}$, $\frac{2}{5a^2}$

2) $\frac{4}{9x^2y}$, $\frac{5}{12xy^2}$

3) $\frac{1}{3a^2b}$, $\frac{1}{7a^2b^3c}$, $\frac{1}{14a^3b^2}$

4) $\frac{3a}{4x^2y}$, $\frac{5b}{6y^2z}$, $\frac{c}{2xz^2}$

2. 분수식의 더하기와 덜기

분수식의 더하기와 덜기는 분수의 더하기, 덜기에서와 비슷한 방법으로 한다.

분모가 같은 분수식들의 더하기, 덜기

분모는 그대로 두고 분자들끼리 더하거나 덜 다음 정돈한다.

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C} \qquad (C\neq 0)$$

례 1. 1) $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}$

2) $\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{2x-2y}{x^2-y^2}=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{2}{x+y}$

3) $\frac{5}{a-1}+\frac{3}{1-a}=\frac{5}{a-1}-\frac{3}{a-1}=\frac{5-3}{a-1}=\frac{2}{a-1}$

문 제

다음 식을 계산하여라. (1－2)

1. 1) $\frac{m}{a}+\frac{n}{a}-\frac{p}{a}$ 2) $\frac{m-n}{2am}+\frac{m+n}{2am}$

3) $\frac{a+b}{x+a}+\frac{a-b}{x+a}$ 4) $\frac{x-1}{3xy}+\frac{x+3}{3xy}-\frac{2-x}{3xy}$

2. 1) $\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}$ 2) $\frac{a^2+16}{a-4}-\frac{8a}{a-4}$

3) $\frac{m^2}{m-n}+\frac{n^2}{n-m}$ 4) $\frac{2x}{x^2-4x+3}+\frac{6}{x^2-4x+3}$

분모가 다른 분수식들의 더하기, 덜기

먼저 통분하고 더하거나 덜다.

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}\pm\frac{BC}{BD}=\frac{AD\pm BC}{BD} \qquad (B\neq 0,\ D\neq 0)$$

례 2. 1) $\dfrac{n}{m}\pm\dfrac{q}{p}=\dfrac{np}{mp}\pm\dfrac{mq}{mp}=\dfrac{np\pm mq}{mp}$

2) $\dfrac{p}{6mn}+\dfrac{m}{9np}=\dfrac{p\cdot 3p}{18mnp}+\dfrac{m\cdot 2m}{18mnp}=\dfrac{3p^2+2m^2}{18mnp}$

3) $\dfrac{a}{ab+b^2}-\dfrac{b}{a^2+ab}=\dfrac{a}{b(a+b)}-\dfrac{b}{a(a+b)}$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab(a+b)}=\frac{(a+b)(a-b)}{ab(a+b)}=\frac{a-b}{ab}$$

옹근식과 분수식의 더하기, 덜기에서는 옹근식을 분모가 1인 분수모양의 식으로 보고 계산한다.

례 3. $x+2-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x+2}{1}-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{(x+2)(x+1)-x^2}{x+1}$

$$=\frac{x^2+3x+2-x^2}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$$

문 제

다음 식을 계산하여라. (1—3)

1. 1) $\dfrac{3}{4x}-\dfrac{5}{6x}$ 2) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}$ 3) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}$

4) $\dfrac{a+1}{a}+\dfrac{a}{a+1}$ 5) $\dfrac{3x}{2x+1}-\dfrac{4}{2x-1}$

2. 1) $\dfrac{4x}{x^2-9}-\dfrac{2}{x-3}$ 2) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2b}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a-b}$

3) $2x+\dfrac{1+x^2}{1-x}$ 4) $a+b-\dfrac{a^2}{a-b}$

3. 1) $\dfrac{1}{12x^2}-\dfrac{1}{42x^2y^2}+\dfrac{1}{14y^2}$ 2) $\dfrac{1}{a^2+ab}-\dfrac{1}{ab-b^2}+\dfrac{2}{a^2-b^2}$

3) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}$ 4) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{2x-2y}+\dfrac{y}{x+y}$

4. 식을 간단히 한 다음에 $x=-1.5$일 때의 값을 구하여라.

1) $\dfrac{x+1}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 2) $\dfrac{x+2}{x^2+3x}-\dfrac{1+x}{x^2-9}$

3. 분수식의 곱하기와 나누기

분수식의 곱하기와 나누기도 분수에서와 마찬가지로 한다.

분수식의 곱하기

분모들끼리 곱하고 분자들끼리 곱한 다음 정돈한다.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

례 1. 1) $\frac{3mn}{25x^2y^3}\cdot\frac{5x^3y^2}{12m}=\frac{3mn\cdot 5x^3y^2}{25x^2y^3\cdot 12m}=\frac{nx}{20y}$

2) $(a^2-b^2)\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{1}\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)\cdot ab}{a+b}$

$=ab(a-b)$

문 제

다음 식을 계산하여라. (1－3)

1. 1) $\frac{2x}{3y}\cdot\frac{9y^2}{6x^2}$ 2) $8a^2b^2\cdot\frac{5b}{12a^3}$

3) $8x^2y^2\cdot\left(-\frac{y}{12x^3}\right)\cdot\left(\frac{3x}{16y^2}\right)$ 4) $\frac{2y}{3x^2}\cdot\frac{x}{2y^2}\cdot\frac{9y}{4x}$

5) $\frac{x^2-y^2}{24y^2}\cdot\frac{18xy}{(x-y)^2}$ 6) $\frac{y^4}{x+2}\cdot\frac{x^2+4x+4}{5x^7}$

2. 1) $\left(\frac{2a}{b}\right)^3\frac{b^2}{4a}$ 2) $\left(\frac{3a^5}{b^4}\right)^2\left(-\frac{b}{a^3}\right)^4$

3) $\left(a+\frac{1}{b}\right)^3\left(\frac{b}{ab+1}\right)^3$ 4) $\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$

3. 1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-16}\cdot\frac{x^2+5x+4}{x^2-4}\cdot\frac{x-4}{x-3}$

2) $\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left[1+\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(a+b-c)(a-b+c)}\right]$

분수식의 나누기

나누는 분수식의 분자와 분모를 바꾼 다음 곱한다.

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\quad (B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0)$$

례 2. 1) $\dfrac{b^2}{6a^2}\div\dfrac{b}{4a^3}=\dfrac{b^2}{6a^2}\cdot\dfrac{4a^3}{b}=\dfrac{2ab}{3}$

2) $\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{y+x}{xy}}=\dfrac{(x^2-y^2)xy}{x+y}=xy(x-y)$

옹근식으로의 나누기에서는 옹근식을 분모가 1인 분수모양의 식으로 보고 계산한다.

례 3. $\dfrac{a^2-ab}{a+b}\div(a-b)=\dfrac{a(a-b)}{a+b}\cdot\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a}{a+b}$

문 제

다음 식을 계산하여라. (1－3)

1. 1) $\dfrac{a}{4}\div\dfrac{12}{b}$ 2) $\dfrac{b}{6a^2}\div\dfrac{b}{4a^3}$ 3) $\dfrac{y}{15x^2}\div\dfrac{y^2}{10x}$

4) $\dfrac{45b^2}{28a^2c}\div\dfrac{18b^3}{21a^4c^2}$ 5) $2x\div\dfrac{4x^2}{54}$ 6) $\dfrac{x^2-y^2}{2xy}\div(x-y)$

7) $\dfrac{1}{a+2}\div\dfrac{3a}{a^2-4}$ 8) $\dfrac{b^2-ab}{a^3}\div\dfrac{a-b}{a^2}$ 9) $\dfrac{1}{a^2-9}\div\dfrac{1}{a^2-6a+9}$

2. 1) $\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}\right)\div\dfrac{z}{4x^2y}$ 2) $\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right)\div\dfrac{2}{a+b}$

3) $\left(\dfrac{a+2}{a}-\dfrac{1}{a}\right)\div\left(\dfrac{1}{a}+1\right)$ 4) $\dfrac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{z}{y}}{\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}}$

3. 1) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-(y-z)^2}\cdot\dfrac{(x-y)^2-z^2}{x^2-xy}\div\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy-xz}$

2) $\left(x-y-\dfrac{4y^2}{x-y}\right)\left(x+y-\dfrac{4x^2}{x+y}\right)\div\left[3(x+y)-\dfrac{8xy}{x-y}\right]$

련습문제

다음 식을 계산하여라. (1−3)

1. 1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}-\dfrac{x}{4-x^2}$ 2) $\dfrac{1}{12x^2}+\dfrac{1}{42x^2y^2}-\dfrac{1}{14y^2}+\dfrac{1}{6xy}$

3) $\dfrac{a+2}{a}-\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{a^2}{a^2-2a}$ 4) $\dfrac{b}{ab-5a^2}-\dfrac{15b-25a}{b^2-25a^2}$

2. 1) $\dfrac{b}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a+b}{b^2-ab}$ 2) $\dfrac{x-30y}{x^2-100y^2}-\dfrac{10y}{10xy-x^2}$

3) $\dfrac{1}{(a-3)^2}-\dfrac{2}{a^2-9}+\dfrac{1}{(a+3)^2}$ 4) $\dfrac{1}{a^2+ab}-\dfrac{1}{ab-b^2}+\dfrac{2}{a^2-b^2}$

3. 1) $x-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ 2) $2x+1-\dfrac{1}{1-x}$

3) $a-b+\dfrac{b^2}{a+b}$ 4) $a+b-\dfrac{b^2+a^2}{b-a}$

4. 다음 분수식을 옹근식과 분수식의 합으로 표시하여라.

1) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ 2) $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2}$

3) $\dfrac{3a^2-a+3}{a^2+1}$ 4) $\dfrac{x^5-4x^3-x^2+2x+4}{2x^2}$

5. 두 작업반에서 m일동안에 각각 $c$kg의 파철을 모으기로 하였는데 이 일을 1작업반에서는 a일, 2작업반에서는 b일이나 앞당겨 끝냈다.

1) 두 작업반에서는 처음에 파철을 하루 평균 몇kg씩 모으기로 하였는가?

2) 두 작업반에서는 하루 평균 몇kg의 파철을 모았는가?

6. 어떤 농산작업반의 전체 밭에 물을 대는데 각각 t_1, t_2시간씩 걸리는 2대의 양수기가 있다. 그런데 양수기운전공들이 기술혁신을 하여 물대는 시간을 첫째 양수기는 a시간, 둘째 양수기는 b시간 줄였다. 두 양수기를 함께 돌리면 전체 밭에 물을 대는데 몇시간 걸리겠는가?

다음 식을 계산하여라. (7－9)

7. 1) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{4a+4b}{5a-5b}$　　2) $\dfrac{a^2-4b^2}{42ab}\cdot\dfrac{35a^2}{a^2-4ab+4b^2}$

3) $\dfrac{ax^2-ay^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\dfrac{3x+3y}{ax^2-2axy+ay^2}$　　4) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\cdot\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-x-12}$

8. 1) $\dfrac{ax^2-ay^2}{x^2+2xy+y^2}\div\dfrac{ax^2-2axy+ay^2}{5x+5y}$

2) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-10}\div\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9x+14}$

9. 1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right)\div\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$　　2) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

3) $\left(\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right)\times\dfrac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}$　　4) $\left(x+1-\dfrac{1}{1-x}\right)\div\left(x-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

10. 다음 분수식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{y-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y}+y}$　　2) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{ab}}$　　3) $\dfrac{a^2b}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{ab}}$　　4) $\dfrac{a-\dfrac{x^2}{a}}{x-\dfrac{a^2}{x}}$

11. $a=-2.5$, $b=-0.5$일 때

$\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$의 값을 구하여라.

제3절. 같기식과 안같기식의 증명

1. 같기식의 증명

같기식의 성질

1) $a=b \Leftrightarrow a-b=0$　　2) $a=b \Leftrightarrow a\pm m=b\pm m$

3) $a=b \Leftrightarrow am=bm\ (m\neq 0)$　　4) $a=b \Leftrightarrow \frac{a}{m}=\frac{b}{m}\ (m\neq 0)$

5) $a=b,\ b=c \Rightarrow a=c$

갈기식의 성질을 써서 주어진 갈기식이 성립한다는것을 밝히는 것을 **같기식의 증명**이라고 부른다.

한 식을 모양이 다른 같은 식으로 고치는것을 **식의 변형**이라고 부른다.

같기식을 증명할 때에는 식의 변형이 자주 쓰인다.

례 1. 다음 갈기식을 증명하여라.

$$x^2-y^2-2x+4y-3=(x+y-3)(x-y+1)$$

(증명) 오른변을 변형하면

$$(x+y-3)(x-y+1)=x^2-xy+x+xy-y^2+y-3x+3y-3$$
$$=x^2-y^2-2x+4y-3 \text{ (왼변)}$$

따라서

$$x^2-y^2-2x+4y-3=(x+y-3)(x-y+1)$$

례 2. $a+b+c=0$일 때 다음 갈기식을 증명하여라.

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=(2a+c)^2+(2b+a)^2+(2c+b)^2$$

(증명) 왼변을 변형하면

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc$$
$$=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$$
$$=(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2$$

$a+b+c=0$이므로

$-a=b+c,\ -b=a+c,\ -c=a+b$

따라서

$$(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2=(2a+c)^2+(2c+b)^2+(2b+a)^2$$

즉 $2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=(2a+c)^2+(2b+a)^2+(2c+b)^2$

문 제

다음 갈기식을 증명하여라. (1−3)

1. 1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)(a-c)(b-c)$

2) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

2. 1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$

2) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$

3. 1) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 일 때 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$

2) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 일 때 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}$

상 식

라마누쟌늘갈기식

인디아의 수학자 라마누쟌(1887년−1920년)은 소학교시절에 벌써 6 165개의 정리와 공식이 들어있는 고등수학책을 자습으로 공부하였는데 거기에는 정리의 증명이나 공식을 이끌어내는 과정이 주어지지 않았으므로 자기 식으로 증명도 해보고 공식을 이끌어내기도 하면서 새로운 정리와 공식을 발견하였다고 한다. 이때 그는 다음과 같은 늘갈기식을 발견하였다.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{4^3-4}+\cdots+\frac{1}{(2n)^3-2n}$$

이것이 라마누쟌늘갈기식이다. 여기서 n은 자연수이다.

2. 안같기식의 증명

안같기식의 성질

1) $a>b \Leftrightarrow a-b>0$ 2) $a>b \Leftrightarrow a\pm m>b\pm m$

3) $a>b \Leftrightarrow am>bm\ (m>0)$, $a>b \Leftrightarrow am<bm\ (m<0)$

4) $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$ 5) $a>b,\ c>d \Rightarrow a+c>b+d$

6) $a>b>0,\ c>d>0 \Rightarrow ac>bd$

안같기식의 성질을 써서 주어진 안같기식이 성립한다는것을 밝히는것을 **안같기식의 증명**이라고 부른다.

례. 안같기식 $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ac$를 증명하여라.

(증명) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]\geqq 0$$

따라서 $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ac$

문 제

1. 다음 안같기식을 증명하여라.

1) $a>0$일 때 $a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$

2) $a>0,\ b>0$일 때 $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$

2. $a>b>0,\ c>0$일 때 다음 안같기식을 증명하여라.

$$\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}$$

3. $a\neq 0$일 때 $\dfrac{a^4+1}{a^2}\geqq 2$임을 증명하여라.

련습문제

1. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$$

2) $$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\frac{a+b+c}{2}$$

2. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $abc=1$일 때

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

2) $a+b+c=0$일 때

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

3. 다음 안같기식을 증명하여라.

1) $a+b\geqslant 0$일 때 $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$

2) $a-b\geqslant 0$일 때 $a^3-b^3\geqslant a^2b-ab^2$

3) $a>0$, $b>0$일 때 $\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

복습문제

1. 다음 옹근식을 여러마디식으로 변형하여라.

1) $3x(x^2-2x-12)$

2) $(2x^3-x^2+3x-1)(-5x^2)$

3) $-x^2(x+2)(x-5)$

4) $(2x-3)5x^2(3x+4)$

2. 다음 식을 인수분해하여라.

1) $(x^2+x+2)(x^2+x-1)-4$

2) $(x^2-x+3)(x^2-x-5)-33$

3) $x^{10}-a^{10}$

4) x^9+a^9

3. 다음 분수식의 뜻구역이 서로 같으면 ○, 같지 않으면 ×로 표시하여라.

1) $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{x^2-1}$　　2) $\frac{b+2}{a-4}$, $\frac{b+2}{4-a}$

3) $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1-x}{1-x^2}$　　4) $\frac{4}{x^2+1}$, $\frac{4(x+2)}{(x^2+1)(x+2)}$

4. 다음 분수식의 뜻구역을 구하여라. 그리고 그것을 수축에 표시하여라.

1) $\frac{x+1}{18-9x}$　　2) $\frac{2x-3}{x(x+5)}$　　3) $\frac{x}{(x-1)(x-3)}$

4) $\frac{1-2x}{x^2-2x-24}$　　5) $\frac{1}{|x|+1}$　　6) $\frac{x}{|x+1|-1}$

7) $\frac{3x}{x^2+x+1}$　　8) $\frac{x-\frac{1}{1-x}}{x+\frac{1}{x}}$

5. 한 도시에서 150km 떨어진 혁명전적지로 승용차가 90km/h의 속도로 떠났다. 1시간 지나서 혁명전적지에서 뻐스가 도시로 떠났는데 t시간만에 승용차를 만났다.

1) 뻐스의 속도 v(km/h)를 t로 표시하여라.

2) t는 어떤 값을 가질수 있는가?

3) $t=\frac{1}{5}$, $t=0.25$일 때 v의 값을 구하여라.

6. 농사를 잘 지을데 대하여 주신 위대한 수령 **김일성**대원수님의 유훈을 높이 받들고 한 농산작업반에서는 새로 개간한 논에 물을 대기 위하여 $a$km의 물길을 째기로 하였다. 처음에는 매일 $b$km씩 잴것을 계획했는데 실지는 매일 $c$km씩 더 했다. 이 작업반에서는 계획했던 일을 며칠 앞당겨 끝냈겠는가?

$a=1.5$, $b=0.3$, $c=0.2$일 때 앞당긴 날자를 구하여라.

7. 다음 분수식의 값이 0이 될 x의 값을 구하여라.

1) $\dfrac{2x-1}{x}$　　2) $\dfrac{(x+1)(x-5)}{x}$　　3) $\dfrac{x^2-3x}{x+2}$

4) $\dfrac{x^2-9}{x}$　　5) $\dfrac{x^2-14x+49}{x^2+1}$　　6) $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x+3}$

다음 식을 계산하여라. (8－10)

8. 1) $\dfrac{x+8}{1-3x}+\dfrac{9-2x}{3x-1}$　　2) $\dfrac{x}{x^2-y^2}+\dfrac{y}{y^2-x^2}$

3) $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{2}{4x^2-1}$　　4) $\dfrac{5}{2a-3}+\dfrac{2}{3+2a}-\dfrac{a-1}{9-4a^2}$

9. 1) $\dfrac{x^2-y^2}{8xy^2}\div\dfrac{x-y}{4xy}$　　2) $\dfrac{a^2-4b^2}{35ab}\cdot\dfrac{28a^2}{a^2-4ab+4b^2}$

3) $\left(1-\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x}$　　4) $\dfrac{x^2+x-2}{5x+15}\div\dfrac{x^2+4x+4}{7x+21}$

10. 1) $\left(1+\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right)\cdot\dfrac{a^2+2ab+b^2}{10a^2}$

2) $\left(\dfrac{a+2}{a-2}\right)^3\div\dfrac{a^3+4a^2+4a}{3a^2-12a+12}\cdot\dfrac{a}{3}$

3) $\left(1-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{12}{x-3}\right)\left(1+\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{12}{x+3}\right)$

11. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$　　2) $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{x+2}}$

3) $\dfrac{x-1+\dfrac{2}{x+2}}{x+1-\dfrac{2}{x+2}}$　　4) $\dfrac{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}$

12. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(\dfrac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\dfrac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\left(1-\dfrac{x-1}{a}-\dfrac{x}{a^2}\right)$

2) $\left[\dfrac{1}{2}\left(x^4-\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right]\cdot\dfrac{3x^2+12x-36}{x^2-x-12}$

13. 다음 갈기식을 증명하여라.

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}$$

14. $a+b+c=0$일 때

$\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$임을 증명하여라.

15. 다음 안갈기식을 증명하여라.

1) $(a+b)(b+c)(a+c)\geqq 8abc\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$

2) $(ab+bc+ca)^2\geqq 3abc(a+b+c)$

16. $a,\ b,\ c$가 정수일 때

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 6$임을 증명하여라.

제5장. 근사값과 그 계산

제1절. 근사값과 오차

1. 근사값

알아보기 1) 국철이네 학급학생을 세여보니 23명이다. 이때 23은 정확한 값인가?

2) 철수는 교실의 길이를 재여 9m를 얻었다. 이때 9m는 0.001mm도 차이나지 않는 정확한 값이라고 말할수 있는가?

3) 어느 군의 인구가 12만명이다. 이때 12만은 1명의 차이도 없는 정확한 값이겠는가?

4) $\frac{1}{6}$을 소수로 0.167이라고 표시할 때 0.167은 정확한 값인가?

정확한 값에 가까운 값을 근사값이라고 불렀다.
생활에서는 정확한 값과 함께 근사값도 많이 쓰인다.

근사값을 얻게 되는 경우

1) 길이, 면적, 체적, 질량 등 량을 잴 때
2) 많은 수의 물건을 대략 셀 때
3) 정확한 값을 반올림하거나 잘라버릴 때

문 제

다음 글에 나오는 수들가운데서 정확한 값과 근사값을 찾아라.

1) 성숙이는 어제 밤 수학문제를 13문제 풀었다.
2) 어제 낮 최고기온은 17℃였다.
3) 지구에서 달까지 거리는 약 380 000km이다.
4) 지금 바람의 속도는 12m/s이다.

5) 1을 3으로 나눈 상이 0.333이다.

6) 어떤 호수의 면적은 14.87km^2이다.

7) 원둘레률은 π이다.

8) 철호는 지난해에 토끼를 16마리 길렀다.

근사값의 표시

a가 A의 근사값이라는것을 다음과 같이 표시한다.

$$A \approx a$$

문 제

1. 다음 □안에 =와 ≈가운데서 알맞는 기호를 써넣어라.

1) $\frac{4}{5}$□0.8 2) $\frac{1}{3}$□0.33

3) $\frac{22}{7}$□3.14 4) 2.6(8)□2.7

2. 다음 수들의 0.01의 자리아래를 반올림하여라.

1) $a=2.7801$ 2) $b=13.4053$

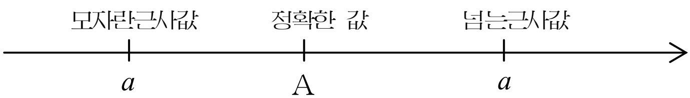
3) $c=0.0052\cdots$ 4) $d=2.1999\cdots$

2. 오차와 그 한계

알아보기 A=3.368의 근사값으로 남철이는 3.4를, 순희는 3.37을 잡았다. 누가 잡은 근사값이 실제값에 더 가까운가? 그것을 어떻게 하면 알수 있겠는가?

정확한 값 A에서 그의 근사값 a를 덜 차 $A-a$를 근사값 a의 **오차**라고 부른다.

$a>A$일 때 a를 **넘는근사값**, $a<A$일 때 a를 **모자란근사값**이라고 부른다.



례 1. $A=\frac{1}{3}\approx 0.33$일 때

$$(\text{오차})=\frac{1}{3}-0.33=0.(3)-0.33=0.00(3)$$

문 제

1. 모자란근사값과 넘는근사값의 오차의 부호를 말하여라.

2. 소수점아래 어떤 자리부터 잘라버리면 넘는근사값을 얻는가? 또 모자란근사값을 얻는가? 반올림할 때는 어떤 근사값을 얻는다고 말할수 있는가?

3. A=5.1672의 근사값으로 다음과 같은 값들을 취할 때 오차를 구하여라.

1) $a=5.17$　　2) $a=5.16$　　3) $a=5$

4) $a=5.167$　　5) $a=6$　　6) $a=5.168$

4. 근사값 a와 그 오차가 다음과 같을 때 정확한 값 A를 구하여라.

1) $a=312$, (오차)$=-0.6$　　2) $a=5.6$, (오차)$=0.07$

3) $a=1.156$, (오차)$=-0.0013$　　4) $a=0.52$, (오차)$=0.007$

알아보기 1) 오차가 정수일 때 근사값이 오차가 부수일 때의 근사값보다 정확한 값에 더 가까운 근사값이라고 말할수 있는가?

2) A=71.5일 때 A의 근사값으로

$$a_1=72,\ a_2=71,\ a_3=71.8,\ a_4=71.3$$

을 잡을 때 어느 근사값이 정확한 값에 가장 가까운가? 왜 그렇게 말할수 있는가?

오차의 절대값을 **절대오차**라고 부른다. 근사값 a의 절대오차를 $\triangle_a$로 표시한다. 즉

$$\triangle_a=|A-a|$$

《$\triangle_a$》를 《**델타 에이**》라고 읽는다.

절대오차가 작을수록 근사값은 정확한 값에 더 가깝다.

례 2. 정확한 값이 A＝5.432이고 그의 근사값은 a_1＝5.43, a_2＝5.44이다. 근사값 a_1과 a_2의 절대오차를 구하여라. 어느것이 정확한 값에 가까운 근사값인가?

(풀이) $\Delta_{a_1} = |A - a_1| = |5.432 - 5.43| = 0.002$

$\Delta_{a_2} = |A - a_2| = |5.432 - 5.44| = 0.008$

$\Delta_{a_1} < \Delta_{a_2}$ 이므로 Δ_{a_1} 이 Δ_{a_2} 보다 A에 더 가까운 근사값이다.

문 제

1. 정확한 값과 근사값이 다음과 같을 때 근사값의 절대오차를 구하여라.

1) A＝16.42, a＝16.4　　2) A＝24.3, a＝24.35

3) A＝0.26, a＝0.258　　4) A＝2.718, a＝2.7

5) $L = \frac{2}{3}$, $\ell = 0.666$　　6) $L = \frac{2}{7}$, $\ell = 0.28$

2. $\frac{13}{8}$의 두 근사값이 1.62, 1.63이라고 할 때 어느것이 정확한 값에 더 가까운 근사값인가?

알아보기 수지연필심의 길이를 센치메터자로 재여 6cm를 얻었다.

1) 이때 절대오차가 얼마인가를 말할수 있는가?

2) 실제길이가 5cm보다는 크고 7cm보다는 작다고 찍어서 말할수 있는가?

3) 절대오차가 1cm를 넘지 않을것이라고 말할수 있는가?

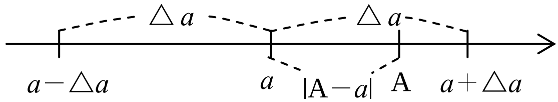
실천에서는 정확한 값을 모르고 근사값을 다루는 때가 많다. 이런 때에는 오차를 구할수 없다. 그러나 절대오차가 기껏 얼마를 넘을수 없다는것은 알수 있다.

절대오차가 기껏해서 $\triangle a$를 넘지 않을 때 즉

$$\triangle_a=|A-a|\leqq\triangle a$$

일 때 $\triangle a$를 근사값 a의 **절대오차한계**라고 부른다.

$$|A-a|\leqq\triangle a \Leftrightarrow a-\triangle a\leqq A\leqq a+\triangle a$$



A의 근사값 a의 절대오차한계가 $\triangle a$라는것을

$$A=a\pm\triangle a$$

와 같이 표시한다.

$$A=a\pm\triangle a \Leftrightarrow a-\triangle a\leqq A\leqq a+\triangle a$$

알아보기 1) $\pi=3.1415926\cdots$의 근사값으로 $\pi\approx3.14$를 취할 때 0.002, 0.001 6, 0.001 593들은 절대오차한계로 될수 있는가?

2) 책상의 길이를 L=120cm±0.5cm라고 할 때 이것은 무엇을 의미하는가?

절대오차한계는 될수록 작게 잡는다.

례 3. 종철이의 키를 재여 155.4cm를 얻었다. 이때 종철이의 키는 분명히 155cm보다는 크고 156cm보다는 작다고 볼수 있다.

종철이의 정확한 키를 Acm라고 하면

$$\triangle_a=|A-155.4|\leqq1$$

이리하여 절대오차한계는 1cm로 취할수 있다.

또한 종철이의 정확한 키가 155.3cm와 155.5cm사이에 있다는것이 확정적이라면 절대오차한계를 0.1cm로 잡는다. 이때

$$A=(155.4\pm0.1)\text{cm}$$

례 4. $\pi=3.141592\cdots$

$\pi\approx3.14$

$\triangle_{\pi}=0.001592\cdots$

$\triangle\pi=0.002$ 또는 $\triangle\pi=0.0016$

문 제

1. 연필의 길이를 재여 약 17cm를 얻었다. 그런데 연필의 실제길이는 16.5cm보다 크고 17.5cm보다는 작다. 17cm라는 근사값의 절대오차한계는 얼마인가? 연필의 실제길이 L을 근사값과 절대오차한계로 표시하여라.

2. 2.78은 소수점 둘째 자리아래를 반올림하여 얻은 수이다. 절대오차한계를 구하여라. 일반적으로 어떤 수를 반올림하여 얻은 수의 절대오차한계는 어떻게 정할수 있는가?

3. 설계도면에 부속품의 길이가 $L=(250\pm0.5)$mm로 표시되였다. 이 부속품이 합격품으로 되려면 길이 L이 얼마이상, 얼마이하로 되여야 하겠는가?

4. 정확한 값이 놓이게 되는 구간을 구하여라.

1) $A=12.5\pm0.3$

$12.5-0.3\leqslant A\leqslant12.5+0.3$

즉 $12.2\leqslant A\leqslant12.8$ $([12.2,\ 12.8])$

2) $B=10.8\pm0.4$

3) $C=0.316\pm0.0005$

4) $D=580000\pm500$

5) $E=0.0098\pm0.00008$

3. 상대오차

알아보기 영숙이는 운동장의 둘레 L_1을 재고 영애는 연필의 길이 L_2를 재여 다음과 같은 값을 얻었다.

$$L_1=(300\pm5)\text{m}$$

$$L_2=(18\pm5)\text{cm}$$

1) 두 학생이 잰 값의 절대오차한계는 각각 얼마인가?

2) 절대오차한계만 알아가지고 누가 더 정확히 재였다고 말할수 있는가?

3) 두 학생이 1cm의 길이를 재는데서 생긴 절대오차한계는 각각 얼마인가?

어느 근사값이 더 정확한가를 비교하자면 절대오차 Δ_a 대신 $|A|$ (또는 $|a|$)에 대한 a의 절대오차의 비

$$\frac{\Delta_a}{|A|} \text{ 또는 } \frac{\Delta_a}{|a|}$$

를 생각하여야 한다. 이 비를 **상대오차**라고 부르며 δ_a로 표시한다.

$$\text{즉 } \delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} \quad \text{또는} \quad \delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

이 식에서 절대오차 Δ_a를 절대오차한계 Δa로 바꾸면 상대오차한계 δa를 얻는다. 즉

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|A|} \text{ 또는 } \delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$$

$$\delta_a \leqslant \delta a$$

상대오차는 보통 %로 표시한다.

절대오차한계를 간단히 **절대오차**, 상대오차한계를 간단히 **상대오차**라고도 부른다.

례 1. A=50, a=52일 때 a의 상대오차를 구하여라.

$$\Delta_a = |50-52| = 2$$

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|} = \frac{2}{50} = 0.04,\ 0.04 \times 100 = 4(\%)$$

례 2. L=84±0.42의 상대오차한계와 실제값이 놓이게 될 구간을 구하여라.

$$\delta \ell = \frac{0.42}{84} \times 100 = 0.5(\%)$$

$$84 - 0.42 \leqslant L \leqslant 84 + 0.42$$

$$83.58 \leqslant L \leqslant 84.42$$

문 제

1. 다음 근사값 a의 상대오차를 구하여라.

1) $A=500,\ a=490$　　　2) $A=17.2,\ a=17$

3) $A=0.0425,\ a=0.04$

2. 철이는 운동장의 길이를 재여 $A=(200\pm1)$m를 얻었고 남이는 운동장의 너비를 재여 $B=(80\pm0.8)$m를 얻었다. 누가 더 정확히 재였는가?

3. 다음 근사값의 상대오차한계를 구하여라.

1) $M=0.0046\pm0.0001$　　　2) $D=2.08\pm0.02$

4. 다음 근사값의 절대오차한계를 구하여라.

1) $a=260,\ \delta a=0.5\%$　　　2) $a=85000,\ \delta a=2.5\%$

5. 다음것을 알고 근사값을 구하여라.

1) $\triangle a=2.8,\ \delta a=2\%$　　　2) $\triangle \ell=0.6,\ \delta \ell=1.5\%$

6. 축척이 1:50 000인 지도에서 두 점 A, B사이의 거리를 재여보니 7.3cm였다. 상대오차한계가 10%일 때 실제거리는 몇km로부터 몇km사이에 있겠는가?

4. 믿을수자

알아보기 1. $A=592$의 근사값으로 $a=590$을 잡았을 때 a에 들어있는 수자 5, 9, 0가운데서 어느 수자는 믿을만 하고 어느 수자는 믿기 어려운가?

2. $A=592$의 근사값이 $a=590$일 때 a의 매개 수자가 놓인 자리의 단위의 절반과 절대오차를 비교하여라.

	5	9	0
단위의 절반	$\frac{100}{2}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{1}{2}$
절대오차	2	2	2

수자가 놓인 자리의 단위의 절반이 절대오차보다 작지 않은 수자는 어느것인가?
어느것을 믿을만 한 수자라고 말할수 있는가?

> 근사값에서 어떤 수자 α가 놓인 자리의 단위의 절반이 절대오차보다 작지 않을 때 α를 **믿을수자**라고 부른다.
>
> 1보다 작은 정수에서는 소수점아래의 0이 아닌 첫 수자앞에 있는 0은 믿을수자로 보지 않기로 한다.

례 1. $a=6230$, $\Delta_a=7$일 때 근사값의 믿을수자를 다 써보아라.

(풀이)

근사값	6	2	3	0
	⋮	⋮	⋮	⋮
자리의 절반	500	50	5	0.5
	∨	∨	∧	∧
절대오차	7	7	7	7

수자 2가 믿을수자이면 2가 놓인 자리보다 높은 자리에 있는 수자 6은 물론 믿을수자이다.

이리하여 근사값 6 230의 믿을수자는 6, 2이다.

례 2. $a=0.002035$, $\Delta_a=0.000003$일 때 근사값 a의 믿을수자를 다 구하여라.

(풀이) 근사값 a에서 마지막수자 5가 놓인 자리는 0.000 001의 자리이고

$$0.000001\div 2=0.0000005<0.000003$$

이므로 수자 5는 믿을수자가 아니다.

수자 3이 놓인 자리의 단위의 절반과 절대오차를 비교하면

$$0.00001 \div 2 = 0.000005 > 0.000003$$

이므로 수자 3은 믿을수자이다.

수자 3이 믿을수자이므로 그 웃자리에 있는 0과 2도 물론 믿을수자이다.

따라서 a의 믿을수자는 2, 0, 3뿐이다.

문 제

1. 근사값 a와 그 절대오차 $\triangle_a$가 다음과 같을 때 a의 믿을수자를 다 찾아라.

   1) $a=7250$, $\triangle_a=8$　　2) $a=0.00925$, $\triangle_a=0.000008$

2. $A=592$일 때 근사값 $a_1=600$, $a_2=500$의 믿을수자의 개수를 구하여라.

3. 다음 근사값의 믿을수자를 말하여라.

   1) 9.37 ± 0.04　　2) 5.397 ± 0.001

   3) 6936 ± 50　　4) 54.358 ± 0.3

   5) 0.00518 ± 0.00001　　6) 0.0180300 ± 0.000003

4. 다음 말이 옳은가?

   1) 근사값에서 수자 α가 믿을수자이면 그보다 오른쪽에 있는 수자들은 다 믿을수자이다.

   2) 근사값에서 수자 α가 믿을수자이면 그보다 왼쪽에 있는 수자들은 다 믿을수자이다.

   3) 근사값에서 수자 α가 믿을수자가 아니면 그보다 왼쪽에 있는 수자들은 다 믿을수자가 아니다.

련습문제

1. 어떤 학생의 키를 재여 153cm를 얻었다. 이 수가 하나의 자리 아래를 다음과 같이 하여 얻었다고 할 때 절대오차한계와 정확한 키를 나타내는 수가 드는 구간을 구하여라.

   1) 잘라버린 경우　　2) 잘라올린 경우　　3) 반올림한 경우

2. A가 드는 구간을 구하여라.

1) A=27±2　　2) |A−5|≤1.2

3) A=0.0053±0.0007　　4) A=2.63±0.005

3. A가 다음과 같은 구간에 들 때 A를 근사값과 절대오차한계로 표시하여라.

1) 173≤A≤191　　2) 0.642≤A≤0.654

3) 19318≤A≤19326　　4) 74000≤A≤75000

4. 다음 근사값의 상대오차한계를 구하여라.

1) A=0.64±0.008　　2) A=8600±40

3) A=0.3±0.0006

5. 다음 근사값의 절대오차한계를 구하여라.

1) a=0.675, δa=0.5%　　2) a=9.8, δa=1.2%

3) ℓ=9600, $\delta \ell$=3%

6. 어떤 물건의 질량을 5번 재여 7.12kg, 7.15kg, 7.18kg, 7.2kg, 7.21kg을 얻었다. 그 평균값을 이 물건의 질량으로 본다면 매번 잰 값들의 절대오차는 얼마인가? 또 절대오차한계는 얼마로 볼수 있는가?

7. 다음것을 알고 근사값을 구하여라.

1) $\triangle a$=3, δa=2%　　2) $\triangle \ell$=72, $\delta \ell$=0.6%

3) $\triangle m$=108, δm=6%　　4) $\triangle p$=0.0008, δp=2.2%

8. 다음 측정에서 어느것이 더 정확히 측정되였는가를 밝혀라.

D=(0.25±0.01)mm,　　L=(380000±500)km

9. 다음 근사값의 마지막 믿을수자의 아래를 반올림하여라. 이때 상대오차한계를 구하여라.

1) 23496±100　　2) 0.0349±0.0001

10. a=22.8, 22.56≤A≤23.05일 때 a의 믿을수자를 말하여라.

제2절. 근사값의 계산

해보기 보통 근사값들은 믿을수자들만 가지고 쓴다.

1. 다음 근사값들의 절대오차한계를 구하여라.

   32.50, 0.019 4, 2 306, 0.240 0

2. 두 근사값 $a=17.2$, $b=3.4167$의 합을 다음과 같이 두가지 방법으로 구하고 그 값들을 비교하여보아라.

   1)
   $$\begin{array}{r} 17.2??? \\ +\ 3.4167 \\ \hline 20.6??? \end{array}$$
   ?은 믿을수자가 아니라는 표식
   ?+1=?
   답에서 ?은 버린다.

   2)
   $$\begin{array}{r} 17.2 \\ +\ 3.4 \\ \hline 20.6 \end{array}$$

오차를 정확히 고려하지 않을 때 근사값들의 계산은 다음과 같이 한다.

근사값의 계산규칙 (1)

두개의 근사값들의 합이나 차를 계산할 때에는 보통 주어진 근사값들가운데서 마지막 믿을수자의 자리가 가장 높은것을 찾고 다른 근사값들은 반올림하여 이보다 한자리 더 남겨서 계산한다. 나온 계산결과에서는 마지막자리를 반올림한다.

례 1. 근사값들로 된 다음 식을 계산하여라.

1) $84.072+5.6\approx89.7$

$$\begin{array}{r} 84.07 \\ +\quad 5.6 \\ \hline 89.67 \end{array}$$

2) $165.846-92.4\approx73.5$

$$\begin{array}{r} 165.85 \\ -\quad 92.4 \\ \hline 73.45 \end{array}$$

문제

1. 근사값들로 된 다음 식을 계산하여라.

1) $4.354+0.4872$ 2) $6.98+1.49735$ 3) $1.369+732.1$

2. $a=24.4076$, $b=5.43$, $c=13.6$일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1) $a+b$ 2) $a-b$ 3) $a+c$ 4) $a-c$

근사값의 계산규칙 (2)

두개의 근사값들의 적이나 상을 계산할 때에는 보통 주어진 수들가운데서 믿을수자의 개수가 가장 작은것을 찾고 다른것은 반올림하여 이보다 한자리 더 남겨가지고 계산한 다음 결과의 믿을수자의 개수는 처음 찾은것과 같게 한다.

례 2. 근사값 0.45326×3.7을 계산하여라.

$$\begin{array}{r} 0.453 \\ \times\quad 3.7 \\ \hline 3171 \\ 1359 \\ \hline 1.6761 \end{array}$$

답. 1.7

근사값들을 10의 제곱을 써서 지수형식으로 표시할 때 결수는 믿을수자들로 쓰기로 한다.

례 3. $(3.6\times10^5)\times(5.6082\times10^3)$을 계산하여라.

$$(3.6\times10^5)\times(5.6082\times10^3)=(3.6\times5.6082)\times10^8$$

$$\begin{array}{r} 3.6 \\ \times\quad 5.61 \\ \hline 36 \\ 216 \\ 180 \\ \hline 20.196 \end{array}$$

답. 20×10^8

문 제

근사값들로 된 다음 식을 계산하여라.(1－4)

1. 1) 0.00275×6.4　　2) $12.768\div0.25$

2. 1) $(1.4+3.9257)\times0.003854$　　2) $148.36\div1.6842$

3) $(0.0632+2.5)\div8.5$

3. 1) $16.93\div2.2-5.18\div3.1$

2) $9.6\times(1.34816+3.5)+7.36\times(2.9-0.73528)$

3) $1.8\times(0.6+21.3842)+91.8\times(5.3+9.0368)$

4. 1) $(9.31083\times10^4)\times(46.8\times10^3)$

2) $(5.48006\times10^{12})\times0.0035$

련습문제

1. 다음 근사값들로 된 식을 계산하여라.

1) $35.89+9.785+12.7$　　2) $6.958-0.46+0.3051$

3) $12.034+0.6478-5.03$　　4) $7.301-5.42+0.41$

2. $A=20.07423$, $B=12.65$, $C=0.71$일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1) $A+B$　　2) $A+B-C$　　3) $A-B+C$

4) AC　　5) $B\div C$　　6) $\frac{AB}{C}$

3. 어떤 건설장구역이 제형모양이다. 아래밑변이 86m, 웃밑변이 83.6m, 높이가 245.8m일 때 이 건설장구역의 면적을 구하여라.

4. 반경이 8.3cm인 원의 둘레의 길이와 면적을 구하여라.

5. 금 1.5t은 몇m^3이겠는가? 금의 밀도는 $1.96\times10^4kg/m^3$이다.

6. 질량이 2.03kg인 금으로 만든 구를 물이 가득찬 그릇에 담으면 얼마만한 체적의 물이 흘러나가겠는가?

7. 지구의 평균밀도는 $5.5\times10^3kg/m^3$이고 지구의 반경은 약 6.4×10^3km이다. 지구의 질량은 몇t인가?

제3절. 수의 표준지수형식

1. 지수가 부수인 제곱

알아보기 다음의 표를 보면서 물음에 대답하여라.

10^n			10^4	10^3	10^2	10^1			
계산한 값			10 000	1 000	100	10			

1) 웃줄에서 왼쪽으로 가면서 10의 지수는 어떻게 변하는가? 이때 아래줄에서 그 값은 어떻게 변하는가?

2) 웃줄에서 오른쪽으로 가면서 10의 지수는 어떻게 변하는가? 이때 아래줄에서 그 값은 어떻게 변하는가?

3) 여기서 찾은 규칙에 의하여 빈 칸에 알맞는 수를 써넣어라.

4) 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, … 의 값은 얼마로 보아야 하겠는가?

지수가 0 또는 부의 옹근수인 10의 제곱은 다음과 같이 약속한다.

$$10^0 = 1$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} \quad (n \in \mathrm{N})$$

그러므로 $10^{-n} = \dfrac{1}{1\underbrace{000\cdots0}_{n}} = 0.\underbrace{000\cdots01}_{n}$

례 1. $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0.1$, $\qquad 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0.0001$

$$0.0008 = \frac{8}{10000} = 8 \cdot \frac{1}{10^4} = 8 \cdot 10^{-4}$$

문 제

1. 다음 수를 분자가 1인 분수모양으로 표시하여라.

1) 10^{-2} 2) 10^{-7} 3) 10^{-18}

2. 다음 수들을 소수모양으로 표시하여라.

1) 10^{-3} 2) 10^{-5} 3) $\frac{1}{10000}$ 4) $\frac{1}{1000000}$

3. 다음 수들을 10의 제곱모양으로 표시하여라.

1) 0.000 01 2) $\frac{1}{100000}$ 3) 1 000 000

4. 다음 수들을 지수형식으로 표시하여라.

1) 7 000 2) 0.000 09 3) 0.005 4

4) $\frac{1}{4}$ 5) $\frac{1}{320}$

알아보기 다음 계산과정을 보고 무엇을 알수 있는가?

$$10^5\times10^{-3}=\frac{100000}{1000}=10^2=10^{5+(-3)}$$

$$10^{-2}\times10^{-3}=\frac{1}{100}\times\frac{1}{1000}=\frac{1}{100000}=10^{-5}=10^{-2+(-3)}$$

$$10^5\div10^2=\frac{100000}{100}=10^3=10^{5-2}$$

$$10^{-3}\div10^{-2}=\frac{1}{1000}\div\frac{1}{100}=\frac{1}{10}=10^{-1}=10^{-3-(-2)}$$

$m,\ n\in Z$일 때

$$10^m\times10^n=10^{m+n}$$

$$\frac{10^m}{10^n}=10^{m-n}$$

례 2. 다음 식을 계산하여라.

1) $10^5 \times 10^{-3} = 10^{5+(-3)} = 10^{5-3} = 10^2 = 100$

2) $10^5 \times 10^{-3} \div 10^{-2} = 10^{5+(-3)-(-2)} = 10^{5-3+2} = 10^4 = 10000$

문 제

다음 식을 계산하여라.

1) $10^7 \times 10^{-4}$　　2) $10^{-5} \times 10^{-2}$

3) $10^{-4} \times 10^2$　　4) $10^8 \div 10^3$

5) $10^{-2} \div 10^{-5}$　　6) $10 \div 10^2$

7) $10^5 \times 10^{-3} \times 10^{-7}$　　8) $10^4 \div 10^{-1} \div 10^{-1}$

2. 수의 표준지수형식

알아보기 다음 수들을 1과 10사이에 있는 수로 만들려면 소수점을 어디에 옮겨 찍어야 하는가?

1) 53.686　　2) 784.3　　3) 62.4

4) 0.64　　5) 0.037 5　　6) 0.000 78

모든 정수들은 1과 10사이에 있는 수와 10의 제곱의 적(지수형식)으로 표시할수 있다.

례 1. $36200 = 3.62 \times 10^4$

$39.86 = 3.986 \times 10$

$0.0037 = 3.7 \times 10^{-3}$

수의 표준지수형식

정수를 구간 [1, 10)에 드는 수에 10의 제곱을 곱한 적으로 표시한것을 **수의 표준지수형식**이라고 부른다.

$A = a \cdot 10^n$ (→ 표준지수)　　$(1 \leqslant a < 10,\ n \in Z)$

(a → 표준결수)

수의 표준지수형식에서도 표준결수를 모두 믿을수자들로 쓴다.

례 2. 다음 수들을 표준지수형식으로 표시하여라.

1) 62 800　　　　2) 0.000 092 3

(풀이) 1) $62800=6.28\times10000=6.28\times10^{4}$

2) $0.0000923=9.23\times0.00001=9.23\times10^{-5}$

문 제

1. 다음 수들가운데서 표준지수형식으로 표시된것을 찾아보아라.

1) $0.9432\cdot10^{-3}$　　2) $5.429\cdot10^{4}$　　3) $10\cdot10^{-4}$

4) $4\cdot10^{-8}$　　5) $1.2\cdot5^{3}$　　6) $1\cdot10^{25}$　　7) $9\cdot10^{0}$

2. 다음 수들을 표준지수형식으로 표시하여라. 소수점이 옮겨간 자리수와 표준지수사이에 어떤 관계가 있는가를 생각하여보아라.

1) 7 230　　　　2) 0.000 62

3) 6 236 000　　　　4) 0.000 000 92

례 3. 1) $25800=2.58\times10^{4}$

4자리

2) $0.000037=3.7\times10^{-5}$

5자리

3) $1000000=1\times10^{6}$

6자리

문 제

1. 다음 수들을 표준지수형식으로 고쳐라.

1) 0.004 79　　2) 3 650 000　　3) 49.43

4) 111.111　　5) 0.42　　6) 1 990 216

7) 10 000 000 000　　8) 42.3×10^{9}　　9) 519×10^{23}

2. 다음 수들을 $a\cdot 10^n$ ($1\leqq a<100$, n은 짝수)모양의 지수형식으로 표시하여라.

1) $350000=35\times10^4$　　2) 35 000

3) 725 831　　4) 0.000 641 9

3. 다음 수들을 $a\cdot 10^n$ ($1\leqq a<1000$, n은 3의 배수)모양의 지수형식으로 표시하여라.

1) $316700000=316.7\times10^6$　　2) 20 500

3) 0.000 9　　4) 0.000 000 040 582

5) 9　　6) 0.529×10^{-7}

련습문제

1. 다음 수들을 지수가 부수인 제곱으로 표시하여라.

1) $\dfrac{1}{10^3}$　　2) $\dfrac{1}{1000000}$

3) 0.000 000 01　　4) 0.000 5　　5) $\dfrac{1}{2\cdot10^4}$

2. 다음 수들을 표준지수형식으로 표시하여라.

1) 0.002 34　　2) 1.009 46

3) 8　　4) 13

5) 0.9　　6) 123 400

7) 0.050 000 9　　8) 1391×10^6

9) 53.85×10^{-5}　　10) 0.00019×10^{-3}

3. 다음 식에 들어있는 수들을 표준지수형식으로 고친 다음 식을 계산하여라.

1) 3000×40000　　2) 80000×0.000125

3) $\dfrac{24000}{50}$　　4) $\dfrac{36000}{0.004}$

5) $0.00008\div2000$　　6) $0.0035\times720000\div0.004$

7) 0.0014×350000　　8) $540000\div27\times10^3$

4. 다음 글에서 수들을 표준지수형식으로 표시하여라.

1) 지구둘레의 길이는 약 40 100km이다.

2) 우리 나라의 면적은 약 223 000km^2이다.

3) 진공속에서 빛의 속도는 약 299 800 000m/s이다.

4) 전자의 질량은 $m_e=0.0091\times10^{-34}$kg이다.

5) 총알의 속도는 보통 $v=800$m/s이다.

5. 지구에서 달까지 거리는 3.8×10^5km이다. 빛의 속도를 대략 3.0×10^5km/s로 보고 지구에서 보낸 빛이 달까지 갔다오는데 걸리는 시간을 계산하여라.

6. 축척이 1:50 000인 지도에서 17mm로 나타나는 두 지점의 실제 거리는 얼마인가?

복습문제

1. 다음 수들을 반올림하여 나오는 근사값과 그 절대오차 및 상대오차를 구하여라.

1) 37.541 (0.1의 자리아래)

2) 53 419.6 (천의 자리아래)

3) 2 568.43 (백의 자리아래)

2. 다음 근사값들의 믿을수자들을 말하여라.

1) 2.94 ± 0.1　　2) 0.4392 ± 0.0005

3) 0.4930 ± 0.0002　　4) 5234 ± 9

5) 2.16500 ± 0.00004

3. 다음 근사값들에서 절대오차한계를 구하여라.

1) 9.4×10^2　　2) 5.723×10　　3) 0.265×10^4

4) 2.3190×10^5　　5) 3.05×10^{-2}

6) 8.532×10^{-3}　　7) 19×10^{12}

4. 세 학생이 어떤 서로 다른 물건들의 길이를 재여 다음과 같은 값들을 얻었다.

$L_1=(28\pm1)$m, $L_2=(64\pm2)$m, $L_3=(125\pm3)$m

1) 어느것의 절대오차한계가 가장 작은가?

2) 어느 근사값을 가장 정확히 재였다고 볼수 있는가?

5. 근사값 a, 절대오차한계 $\triangle a$, 상대오차한계 δa가운데서 2개를 알고 나머지 1개의 값을 구하는 식을 써라. 또 정확한 값 A를 근사값과 절대오차한계로 표시하여라.

6. 두 수 A, B를 반올림하여 얻은 근사값이 각각 2.31, 1.20이다. 이때 A+B의 정확한 값의 범위를 □안에 써넣어라.

□≤A+B≤□

7. 근사값의 계산규칙에 의하여 다음 식을 계산하여라.

$$\frac{7.165\times3.4+5.9\times8.43216}{9.7\times0.8884-3.5\times0.971}$$

8. 어떤 대형굴착기가 땅에 주는 압력이 9.59×10^4Pa이다. 무한궤도가 땅에 접하는 면적이 $9.4\mathrm{m}^2$라면 굴착기의 질량은 얼마인가?

9. 다음 근사값들을 믿을수자만 남기고 표준지수형식으로 써라.

1) A=4376±7　　2) B=0.00563±0.00005

3) C=23.84±0.004　　4) D=0.9800±0.00008

10. 다음 글에 있는 수들을 표준지수형식으로 표시하여라.

1) 지구에서 태양까지의 거리는 약 150 000 000km이다.

2) 1μm(마이크로메터)는 0.000 001m이다.

3) 전자의 전기량은 1600×10^{-22}C(꿀롱)이다.

제6장. 원

제1절. 원과 3각형

1. 3각형의 외접원

원둘레에 세 점을 찍고 그 점들을 정점으로 하는 3각형을 그렸다. 이때 △ABC를 원 O에 **내접하는 3각형**이라고 부른다.

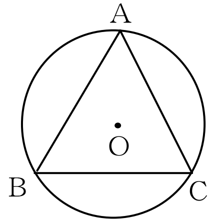
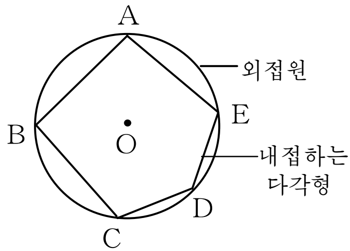


그림 6−1

다각형의 모든 정점이 한 원둘레에 놓일 때 그 다각형은 원에 **내접**한다고 말하고 그 원을 다각형의 **외접원**이라고 부른다.



문 제

그림 6−2에서 원에 내접하는 3각형, 4각형, 5각형을 다 말하여라.

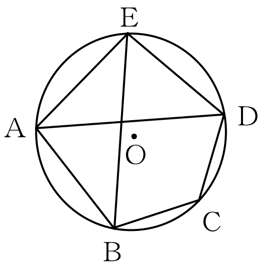


그림 6−2

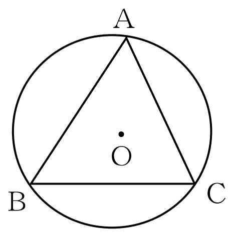


그림 6−3

알아보기 △ABC의 외접원을 그렸다고 하고 그 중심을 O라고 하면(그림 6−3)

1) $d(\mathrm{O, A}) = d(\mathrm{O, B}) = d(\mathrm{O, C})$이다. 왜 그런가?

2) 점 O는 변 AB의 수직2등분선에 있다고 말할수 있는가? 다른 변 BC, AC의 수직2등분선에도 점 O가 놓이겠는가?

정리 1. 3각형의 세 변의 수직2등분선은 늘 한 점에서 사귄다.

(증명) △ABC의 변 AB, BC, CA의 수직2등분선을 각각 m, ℓ, n 이라고 하자. ℓ과 m의 사귐점을 O라고 할 때 O가 n에 놓인다는것을 증명하면 된다.

점 O가 m에 놓이므로

OA=OB

점 O가 ℓ에 놓이므로

OB=OC

따라서 OA=OC

따라서 O는 n에 놓인다.

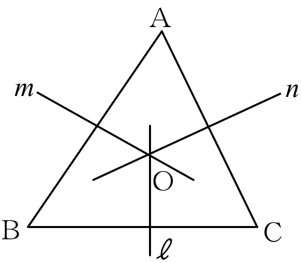


그림 6-4

3각형의 세 변의 수직2등분선의 사귐점은 외접원의 중심으로 된다. 이 점을 3각형의 **외심**이라고 부른다.

문 제

1. 1) 뾰족3각형, 직3각형, 무딘3각형을 하나씩 그리고 그 외접원을 그려라.

2) □안에 알맞는 글자를 써넣어라.

① 뾰족3각형의 외심은 3각형의 □에 놓인다.

② 직3각형의 외심은 □에 놓인다.

③ 무딘3각형의 외심은 3각형의 □에 놓인다.

2. 영남이는 세 마을 A, B, C로부터 들려오는 12시 보도소리를 같은 시각에 들었다. 영남이가 있는 곳을 그림에 찍어보아라.(그림 6-5)

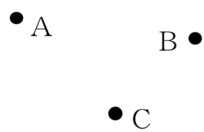


그림 6-5

3. 세 점 A, B, C가 한 직선에 놓일 때 그 세 점을 지나는 원둘레를 그릴수 있겠는가? 실지 그려보고 말하여라.

2. 3각형의 내접원

원둘레에 그림 6－6과 같이 접선을 3개 그어 △ABC를 하나 그렸다.

이때 △ABC를 원 O에 **외접하는 3각형**이라고 부른다.

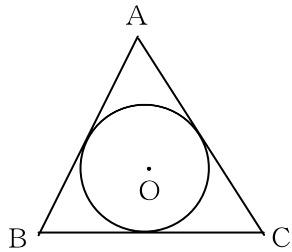
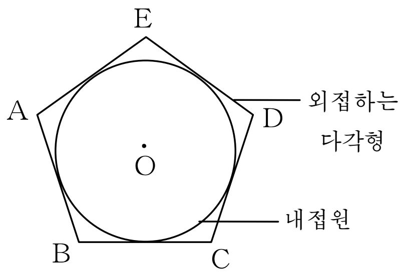


그림 6－6

다각형의 모든 변들이 한 원둘레에 접할 때 그 다각형은 원에 **외접**한다고 말하며 그 원을 다각형의 **내접원**이라고 부른다.



문 제

1. 다음 글에 맞는 그림을 1개씩 그려라.
   1) △ABC는 원 O에 외접한다.
   2) 원 O는 4각형 ABCD에 내접한다.
   3) 원 O는 △ABC의 내접원이다.
   4) 4각형 ABCD는 원 O에 외접한다.
2. 그림 6－7에서 원 O에 외접하는 3각형, 4각형을 다 말하여라.

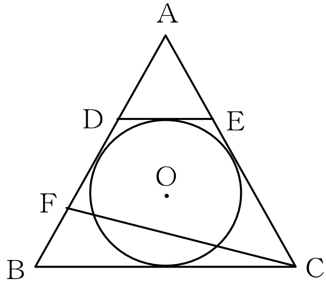


그림 6－7

알아보기 △ABC에 내접원이 그려졌다고 하고 그 중심을 O라고 하자. (그림 6−8)

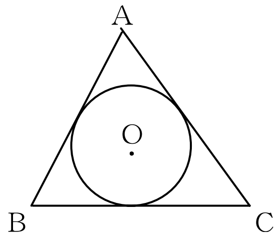


그림 6−8

1) d(O, AB)＝d(O, BC)＝d(O, AC) 이다. 왜 그런가?

2) 점 O는 ∠A의 2등분선에 있다고 말할수 있는가? ∠B, ∠C의 2등분선에도 놓이는가?

정리 2. 3각형의 세 아낙각의 2등분선은 늘 한점에서 사귄다.

(증명) 3각형의 세 아낙각 ∠A, ∠B, ∠C의 2등분선을 각각 ℓ, m, n이라고 하자.

ℓ과 m의 사귐점을 O라고 하고 O가 n에 놓인다는것을 증명하면 된다.

O가 ℓ에 놓이므로

d(O, AB)＝d(O, AC)

O가 m에 놓이므로

d(O, AB)＝d(O, BC)

∴ d(O, AC)＝d(O, BC)

∴ O는 n에 놓인다.

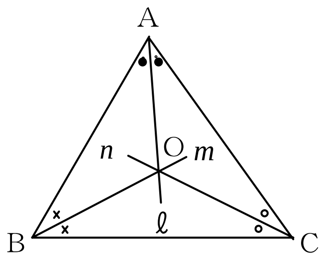


그림 6−9

3각형의 세 아낙각의 2등분선의 사귐점은 그 3각형의 내접원의 중심이 된다. 이 점을 3각형의 **내심**이라고 부른다.

△ABC의 변 BC와 다른 두 변의 연장선 BD, CE에 접하는 원 O_1을 3각형의 **방접원**이라고 부른다.

여기서

$d(O_1, BD)＝d(O_1, BC)＝d(O_1, CE)$

한 3각형에는 방접원이 3개 있다.

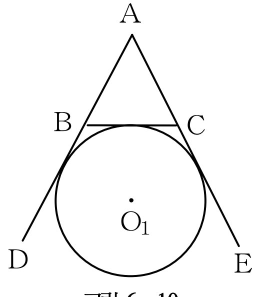


그림 6−10

문 제

1. 뾰족3각형, 직3각형, 무딘3각형을 1개씩 그리고 그의 내접원을 그려라.
2. △ABC모양의 판이 있다. AB = 40cm, BC = 30cm, AC = 50cm일 때 이 판에서 반경이 가장 큰 원판을 오려내려고 한다. 이 원판의 반경을 구하여라.
3. 세 정점이 다 종이밖에 있고 종이에는 변의 일부만이 있는 3각형에 원을 내접시킬 때 그 중심을 구하여라.

련습문제

1. 세 변이 3cm, 4.5cm, 5cm인 3각형을 하나 그리고 그에 내접하는 원과 외접하는 원을 그려라.
2. 다음것들가운데서 옳은것은 (   )이다.
   1) 3각형의 내심은 그 3각형의 아낙에 있다.
   2) 3각형의 외심은 그 3각형의 바깥에 있다.
   3) 3각형의 외심과 내심은 3각형의 바깥 또는 아낙에 있다.
   4) 우의것은 다 옳지 않다.
3. 3각형의 내심과 외심이 겹치는 3각형은 어떤 3각형인가?

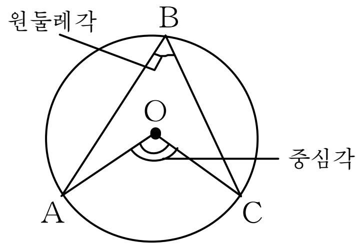
제2절. 원둘레각

1. 원둘레각

원둘레의 한 점에서 두 활줄이 사귈 때 그사이의 각을 두 활줄사이에 끼인 활등에 대한 **원둘레각**이라고 부른다.

때로는 활줄에 대한 **원둘레각**이라고도 부른다.

활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원둘레각에는 그 활등에 대한 중심각이 대응한다.



문제

그림 6－11에서

1. 활등 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{CA}$의 원둘레각을 말하여라.
2. 활등 $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{BCD}$에 대한 원둘레각을 말하여라.

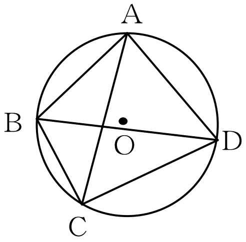


그림 6－11

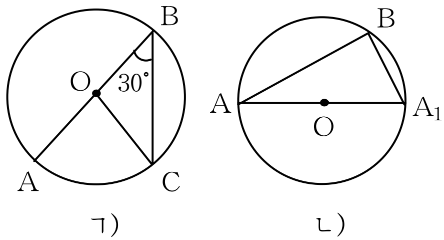


그림 6－12

알아보기 그림 6－12에서

1) 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원둘레각과 중심각을 말하여라.
《중심각＝2×원둘레각》이라고 말할수 있는가?
(그림 6－12의 ㄱ))

2) 활등 $\overset{\frown}{AA_1}$에 대한 원둘레각과 중심각을 비교하여라.(그림 6－12의 ㄴ))

> **정리 3.** 원둘레각은 같은 활등에 대한 중심각의 $\frac{1}{2}$과 같다.

조건. $\angle ABC$: 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원둘레각
$\angle AOC$: 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 중심각

결론. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

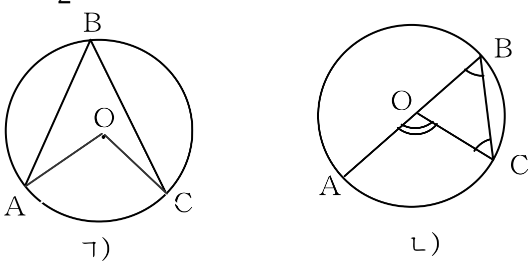


그림 6－13

(증명) 1) 중심 O가 $\angle ABC$의 한 변에 있는 경우(그림 6-13의 ㄴ))

$\triangle BOC$에서 $OB=OC$(반경)이므로 $\angle B=\angle C$

그런데 $\angle AOC=\angle B+\angle C$ (3각형의 바깥각의 성질)

따라서 $\angle AOC=\angle B+\angle B=2\angle ABC$

$$\therefore \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

2) 중심 O가 $\angle ABC$의 아낙에 있는 경우 (그림 6-14의 ㄱ))

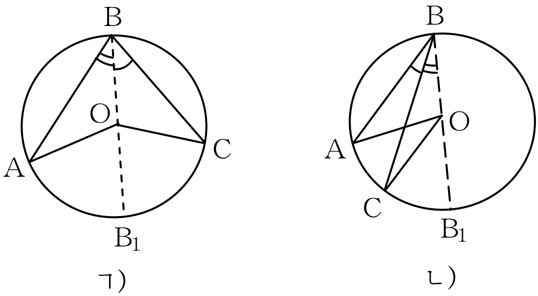


그림 6-14

직경 BB_1을 그으면 $\angle ABB_1=\frac{1}{2}\angle AOB_1$, $\angle B_1BC=\frac{1}{2}\angle B_1OC$

따라서 $\angle ABB_1+\angle B_1BC=\frac{1}{2}(\angle AOB_1+\angle B_1OC)$

여기서

$$\angle ABB_1+\angle B_1BC=\angle ABC,\ \angle AOB_1+\angle B_1OC=\angle AOC$$

따라서 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$

3) 중심 O가 $\angle ABC$의 바깥에 있는 경우(그림 6-14의 ㄴ))

직경 BB_1을 그으면 $\angle ABB_1=\frac{1}{2}\angle AOB_1$, $\angle CBB_1=\frac{1}{2}\angle COB_1$

따라서 $\angle ABB_1-\angle CBB_1=\frac{1}{2}(\angle AOB_1-\angle COB_1)$

여기서

$$\angle ABB_1-\angle CBB_1=\angle ABC,\ \angle AOB_1-\angle COB_1=\angle AOC$$

$$\therefore \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$$

문 제

1. 1) 중심각이 다음과 같을 때 그에 대한 원둘레각을 구하여라.

$36°$, $35°\ 26'$, $82°\ 36'$, $\frac{1}{2}\angle R$, $\frac{2}{3}\angle R$, $\frac{3}{5}\angle R$

2) 원둘레각이 다음과 같을 때 그에 대한 중심각을 구하여라.

$21°$, $29°\ 13'$, $38°\ 28'$, $56°$, $\frac{2}{7}\angle R$, $\frac{2}{5}\angle R$, $\frac{3}{11}\angle R$

2. 1) 그림 6－15에서 $\overset{\frown}{ADC}$에 대한 중심각을 그려라. $\angle ABC=102°$일 때 그 중심각은 몇도인가?

2) 그림 6－16에서 $\overset{\frown}{ADC}$에 대한 원둘레각을 하나 그려라. $\angle a=250°$일 때 원둘레각은 몇도인가?

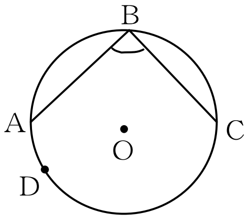


그림 6－15

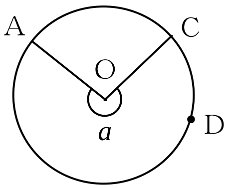


그림 6－16

3. 그림 6－17에서 $\angle x$는 몇도인가?

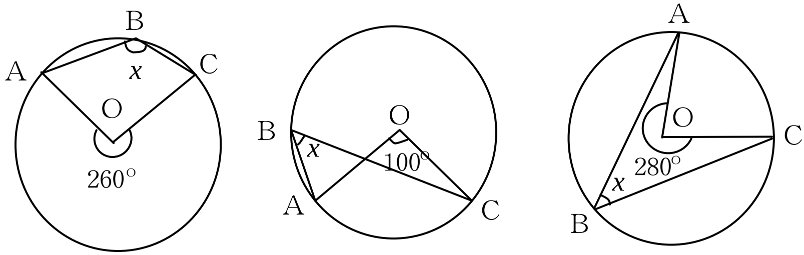


그림 6－17

4. 그림 6－18에서와 같이 선분 AB와 그밖의 한 점 M이 있을 때 $\angle AMB$를 점 M에서 **선분 AB를 보는 각**이라고 부른다. 그림 6－19에서 선분 AB를 보는 각들을 말하여라.

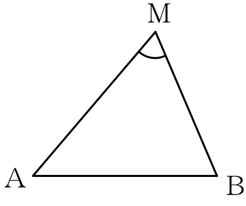


그림 6－18

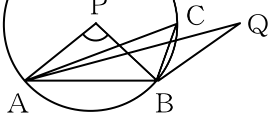


그림 6－19

알아보기 그림 6－20에서 $\angle x_1$, $\angle x_2$, $\angle x_3$은 몇도인가? 또 다 같다고 말할수 있는가? 어느 정리로부터 그렇게 말할수 있는가?

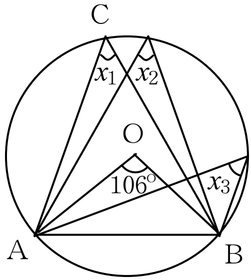


그림 6－20

계. 한 원에서 같은 활등에 대한 원둘레각은 같다.

이 각을 그 활등 $\overset{\frown}{ACB}$가 **품는 각**이라고 부른다.

우에서와 같이 어떤 정리로부터 곧 따라나오는 명제를 **계(따름)**라고 부른다.

문 제

1. 1) 그림 6－21에서 직경 AC를 보는 각들을 말하여라. $\angle APC > \angle AQC$를 증명하여라.

2) AC를 보는 각이 ∠R인 점들의 모임은 어떤 도형을 만들겠는가?

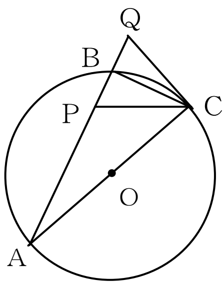


그림 6－21

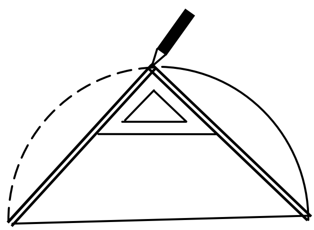


그림 6－22

2. 그림 6－22와 같이 직각의 두 변이 고정된 두 점을 각각 지나는 직선에 놓이도록 삼각자를 움직여가면 연필의 끝점은 어떤 선을 따라 움직이겠는가?

2. 활줄과 접선사이의 각

해보기 1. 그림 6−23에서 활줄 AC와 접선 TC사이의 $\angle x$를 구하여라.

2. 활등 $\overset{\frown}{AC}$에 대한 임의의 원둘레각 $\angle ABC$를 그리고 그 각과 $\angle ACT$를 비교하여라.

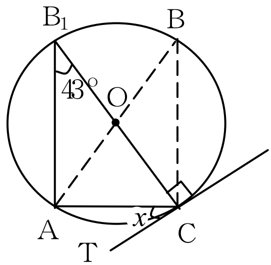


그림 6−23

> **정리 4.** 원둘레의 한 점에서 활줄과 접선을 그었을 때 그사이의 각은 그 각 안쪽에 있는 활등에 대한 원둘레각과 같다.

조건. CT는 접선

결론. $\angle ACT = \angle ABC$

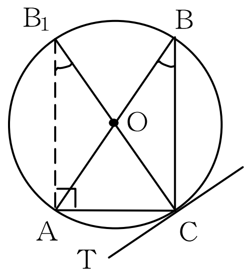


그림 6−24

(증명) 활줄 AC와 접선 CT가 만드는 두 각가운데서 뾰족각을 $\angle ACT$라고 하자.

이제 직경 CB_1을 그으면 $\angle B_1AC = \angle R$ (직경에 대한 원둘레각)

따라서 $\angle AB_1C + \angle ACB_1 = \angle R$ (1)

그리고 $\angle ACT + \angle ACB_1 = \angle R$ (접선의 성질) (2)

따라서 (1), (2)에 의하여

$\angle AB_1C = \angle ACT\ (= \angle R - \angle ACB_1)$

여기서 $\angle AB_1C = \angle ABC$ ($\overset{\frown}{AC}$에 대한 원둘레각)

따라서 $\angle ABC = \angle ACT$

문 제

1. 활줄 AC와 접선 CT가 만드는 각이 무딘각일 때 정리 4를 증명하여라.

2. 원밖의 한 점 A에서 그림 6−25와 같이 접선 AM과 가름선 ABC를 그었다.

∠A=20°, ∠C=24°일 때

1) ∠AMB는 몇도인가?

2) ∠MBC는 몇도인가?

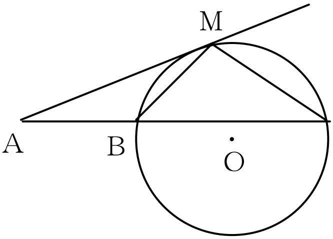


그림 6−25

알아보기 그림 6−26에서 ∠B=∠ACT 이다. 그러면 ∠OCT=∠R (즉 CT가 접선)이겠는가? △ODC를 보고 생각하여라.

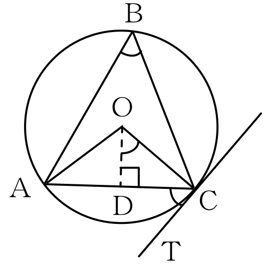


그림 6−26

정리 5. 원둘레의 한 점에서 그은 활줄과 직선사이의 각이 이 각에 있는 활등에 대한 원둘레각과 같으면 그 직선은 원의 접선이다.

조건. 그림 6−27에서 ∠ABC=∠ACT

결론. TC는 접선이다. (즉 OC⊥TC이다.)

(증명) TC가 접선이 아니라고 해보자.

이제 그림 6−27의 점 C에서

원 O에 접선 CT_1을 긋자.

그러면 정리 4에 의하여

$$\angle ABC = \angle ACT_1$$

한편 ∠ABC=∠ACT

따라서 TC가 접선이 아니라고

한것이 잘못이다.

따라서 TC는 원 O의 접선이다.

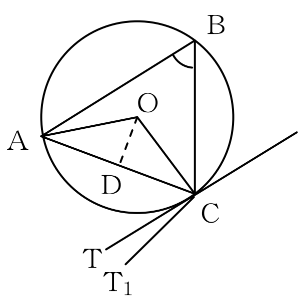


그림 6−27

귀유법

명제 《p이면 q이다.》를 다음과 같이 증명할수 있다.

① 먼저 《p이지만 q가 아니다.》라고 해본다.(가정한다.)

② 이때 이미 알고있는것과 모순된다는것을 밝힌다.

③ 따라서 《p이면 q이다.》로 될수밖에 없다.

문 제

1. 《직선 ℓ밖의 한 점 M에서 그 직선에 수직선을 하나밖에 그을수 없다.》를 귀유법으로 증명하여라.
2. 《4각형의 네 아낙각가운데 180°보다 큰 각은 하나보다 많을수 없다.》를 증명하여라.
3. 《세 점 A, B, C에서 AB+BC=AC이면 이 세 점은 한 직선에 놓인다.》를 증명하여라.

련습문제

1. 원에 내접하는 4각형 ABCD를 그리고 대각선을 그어라. 이때 같은 각들을 모두 말하여라.
2. 그림 6-28에서 DE는 주어진 원의 접선이다. $\angle DAB=60°$, $\angle CAE=65°$이다. $\triangle ABC$의 아낙각들은 각각 얼마인가?

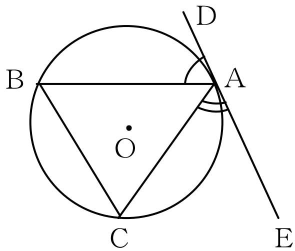


그림 6-28

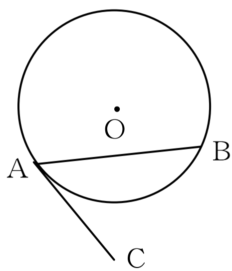


그림 6-29

3. 원 O에서 활줄 AB와 접선 AC사이의 각이 60°일 때 그 각 아낙에 있는 활등 $\overset{\frown}{AB}$가 품는 각은 얼마인가?(그림 6-29)

4. △ABC에서 ∠B=30°이다. 점 A와 C에서 각각 △ABC의 외접원에 접선을 긋고 접선들이 사귀는 점을 D라고 하자. 이때 ∠ADC를 구하여라.

5. 영웅적조선인민군의 한 어뢰정(F)에서 등대 A, B, C를 보는 각을 재였더니 ∠AFB=40°, ∠BFC=30°였다. 등대의 자리가 표시되여 있는 지도에서 어뢰정이 있는 자리를 말하여라.(그림 6－30)

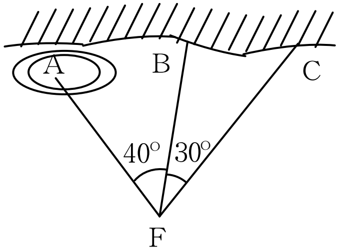


그림 6－30

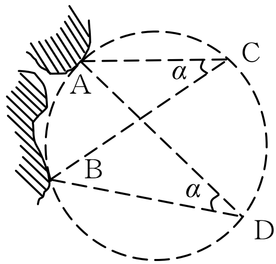


그림 6－31

6. 배에서 두 등대 A, B를 보는 각을 재여서 배가 위험구역에 들어가지 않도록 할수 있다. 활줄 AB에 대한 어떤 활등의 아낙이 위험구역이고 그 활등이 품는 각 α를 알고있다고 한다.(그림 6－31) 위험구역밖에 있으려면 A, B를 보는 방향사이의 각의 크기가 얼마여야 하는가?

7. 그림 6－32에서 ∠x를 구하여라.

8. 원둘레 O의 점 C에서 이 원에 접선을 하나만 그을수 있다는것을 귀유법으로 증명하여라.

9. △ABC의 ∠B, ∠C의 2등분선의 사귐점을 I, 또 BI, CI의 연장선이 외접원과 사귀는 점을 각각 D, E라고 할 때 DI=EI이면 △ABC는 어떤 3각형인가?

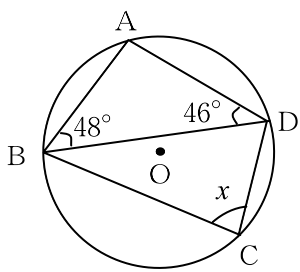


그림 6－32

제3절. 원과 4각형

해보기 그림 6−33과 같이 원에 내접하는 4각형이 있다. 맞은각의 합을 구하여라.

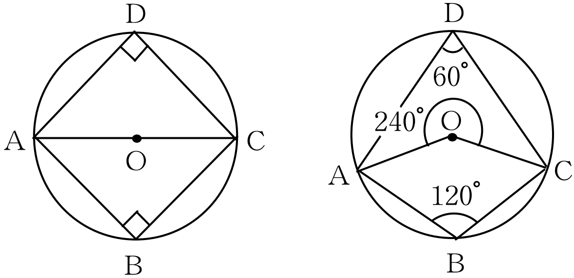


그림 6−33

> **정리 6.** 원에 내접하는 4각형에서 맞은각의 합은 $2\angle R$이다.

조건. 4각형 ABCD는 원 O에 내접한다.

결론. $\angle B+\angle D=\angle A+\angle C=2\angle R$

(증명) $\angle D=\dfrac{\alpha}{2}$ ($\overset{\frown}{ABC}$에 대한 원둘레각)

$\angle B=\dfrac{\beta}{2}$ ($\overset{\frown}{ADC}$에 대한 원둘레각)

따라서 $\angle B+\angle D=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}\cdot 4\angle R=2\angle R$

즉 $\angle B+\angle D=2\angle R$

마찬가지로 $\angle A+\angle C=2\angle R$

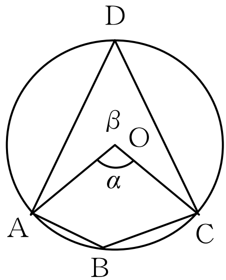


그림 6−34

문 제

1. 그림 6−35에서 $\angle B=70°$, $\angle C=85°$이다. △ADE의 아낙각들을 구하여라.

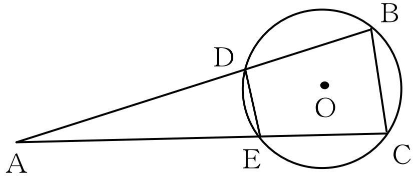


그림 6−35

2. 원에 내접하는 4각형에서 한 바깥각은 그 정점의 맞은각과 같다. 그림 6－36을 보면서 조건과 결론을 갈라쓰고 증명하여라.

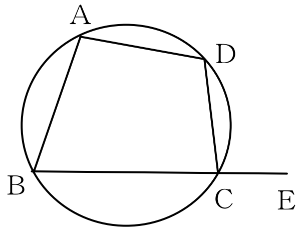


그림 6－36

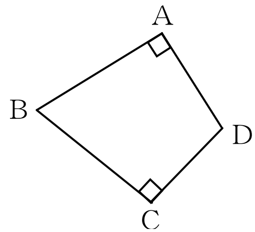


그림 6－37

알아보기 그림 6－37의 4각형 ABCD에서 $\angle A=\angle C=\angle R$이다. 이때 4각형은 원에 내접하겠는가? 세 점 A, D, C를 지나는 원을 그리고 생각하여라.

> **정리 7.** (정리 6의 거꿀정리)
>
> 4각형의 맞은각의 합이 $2\angle R$이면 그 4각형은 원에 내접한다.

조건. 4각형 ABCD에서 $\angle B+\angle D=2\angle R$

결론. 4각형 ABCD는 원에 내접한다.

(증명) 귀유법으로 증명하자.

세 점 A, B, C를 지나는 원둘레가 점 D를 지나지 않는다고 가정하자. (점 D가 원안에 있다고 하자.)

직선 AD가 원둘레와 사귀는 점을 D_1이라고 하고 C와 D_1을 맺자.

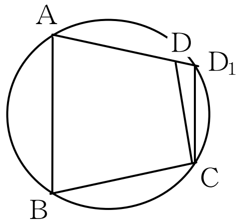


그림 6－38

그러면 $\angle B+\angle D_1=2\angle R$ (정리 6)

그런데 $\angle B+\angle ADC=2\angle R$ (조건)

이 두 식을 비교하면 $\angle D=\angle D_1$

이것은 3각형의 바깥각의 성질에 어긋난다. 따라서 점 D도 그 원둘레에 놓일수밖에 없다. 점 D가 원밖에 있는 경우도 마찬가지로 증명된다.

네 점이 한 원둘레에 놓일 조건

1) 두 점 C, D가 직선 AB에 관하여 같은쪽에 있을 때
   ∠ACB=∠ADB이면 A, B, C, D는 한 원둘레에 놓인다.
2) 두 점 C, D가 직선 AB에 관하여 반대쪽에 있을 때
   ∠ACB+∠ADB=2∠R이면 A, B, C, D는 한 원둘레에 놓인다.

4각형 ABCD가 원에 외접하였을 때 접선의 성질을 쓰면 (그림 6−39)

AB+CD=BC+AD

라는것을 쉽게 알수 있다.

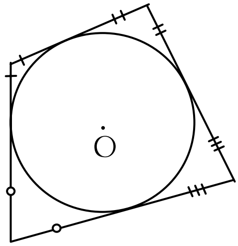


그림 6−39

4각형이 원에 외접하면 그 4각형의 맞은변의 합들은 같다.
그 거꿀도 성립한다.

문 제

1. 1) 평행4변형들가운데서 원에 내접하는것은 무슨 4각형인가?
2) 직4각형을 하나 그리고 외접원을 그려라.
3) 제형들가운데서 원에 내접하는것은 무슨 제형인가?
4) 바른제형을 하나 그리고 그 외접원을 그려라.

2. 4각형 ABCD에서 ∠BAC=∠BDC=∠R이면 ∠DBC=∠DAC이다. 증명하여라.(그림 6−40)

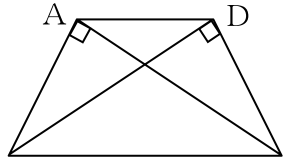


그림 6−40

3. 바른4각형 ABCD의 내접원의 중심 O와 점 A를 지나는 원이 변 AB, AD와 각각 점 P, Q에서 사귈 때 AP+AQ=AB이다. 증명하여라.

련습문제

1. △ABC에서 두 높이 BE, CF의 사귐점을 H로 표시하자. (그림 6－41)

1) 이 도형에 표시된 점들가운데서 한 원둘레에 놓이는 네 점을 모두 말하여라.

2) ∠EBC＝∠HAE이다. 증명하여라.

3) AD⊥BC를 증명하여라.

4) ∠HDB와 ∠HEA를 비교하여라.

(△ABC의 세 높이의 사귐점 H를 **수심**이라고 부른다.)

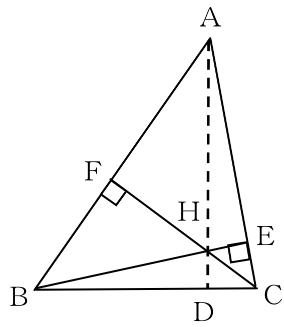


그림 6－41

2. 원 O의 사귀지 않는 두 활줄 AB, CD의 연장선이 원밖의 점 E에서 사귈 때 ∠AEC의 크기는 활등 $\overset{\frown}{AC}$와 $\overset{\frown}{BD}$에 대한 원둘레각의 차와 같다는것을 증명하여라.

3. △ABC의 변 BC, CA, AB에 각각 점 D, E, F를 찍었다.

1) 두 원둘레 AFE와 BFD의 둘째 사귐점을 M으로 표시할 때 ∠EMD와 ∠A＋∠B를 비교하여라.

2) 원둘레 CDE는 점 M을 지난다는것을 증명하여라.

4. 4각형 ABCD와 선분 BC에 한 점 M이 있다. 두 원둘레 ABM과 CDM이 다시 사귀는 점을 P로 표시하자. (그림 6－42)

1) 두 직선 AB와 CD가 점 E에서 사귈 때 점 P는 원둘레 AED에 놓인다는것을 증명하여라.

2) ∠PAD와 ∠PED를 비교하여라.

3) AB∥CD일 때 점 P는 선분 AD에 놓인다는것을 증명하여라.

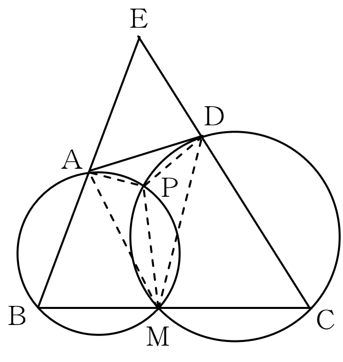


그림 6－42

5. 두 점 A와 B에서 사귀는 두 원 O와 O_1이 있다. 원둘레 O에 한 점 C를 찍고 원둘레 O_1에 직선 CA에 놓이지 않는 한 점 D를 찍었다. 점 B를 지나는 한 직선이 원둘레 O, O_1과 사귀는 점을 각각 M, N으로 표시하자. 이때 직선 CM과 DN의 사귐점을 R로 표시하면 네 점 A, C, R, D는 한 원둘레에 놓인다는것을 증명하여라.

상식

3각형의 5심과 9점원

3각형의 외심(세 변의 수직2등분선의 사귐점), 내심(세 아낙각의 2등분선의 사귐점), 수심(세 높이의 사귐점), 무게중심(세 가운데선의 사귐점), 방심(한 아낙각과 그에 붙어있지 않는 두 바깥각의 2등분선의 사귐점)을 **3각형의 5심**이라고 부른다. 3각형에서 세 변의 가운데점, 세 높이의 밑점, 수심과 세 정점을 련결하는 선분들의 가운데점들로 이루어진 9개의 점들은 한 원둘레에 놓인다. 이 원을 **9점원**이라고 부른다.

복습문제

1. 2등변3각형, 바른3각형을 1개씩 그리고 그 매개 3각형의 내접원과 외접원을 그려라.
2. 그림 6−43에서 직경 CD⊥AB, ∠ACD=20°이다. ∠BOD를 구하여라.

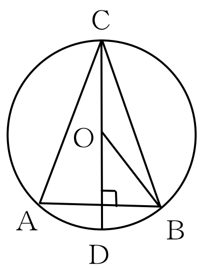


그림 6−43

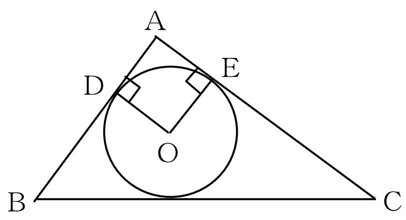


그림 6−44

3. 직3각형 ABC에서 AB=6cm, BC=10cm, CA=8cm일 때 △ABC의 내접원 O의 반경의 길이를 구하여라.(그림 6−44)

4. 1) 평행인 직선 AB와 CD를 긋고 이것들과 사귀는 한 직선 AC를 그어라. 이때 세 직선에 접하는 원 O를 그려라.

2) 이 도형에서 ∠AOC＝∠R라는것을 증명하여라.

5. 활등 $\overset{\frown}{AB}$의 가운데점을 C라고 하면 반직선 AC는 점 A에서 그은 접선과 활줄 AB사이의 각을 2등분한다. 증명하여라.(그림 6－45)

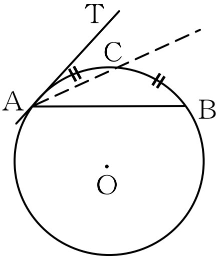


그림 6－45

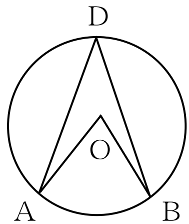


그림 6－46

6. 그림 6－46에서 활등 $\overset{\frown}{AB}$는 원둘레의 $\frac{1}{5}$이다. ∠AOB와 ∠ADB를 구하여라.

7. 원에 외접하는 평행4변형이 등변4각형이라는것을 증명하여라.

8. 원에서 활등 $\overset{\frown}{AB}$와 $\overset{\frown}{CD}$가 같을 때(네 점은 A, B, C, D 순서로 놓여있음)

1) ∠ADB＝∠DAC이다. 왜 그런가?

2) AD∥BC라는것을 증명하여라.

9. 그림 6－47에서 AB, CD는 원 O의 직경이고 점 B는 활등 $\overset{\frown}{DE}$의 2등분점이다. ∠BDE＝24°일 때 각 x, y, z를 구하여라.

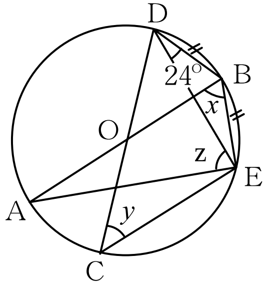


그림 6－47

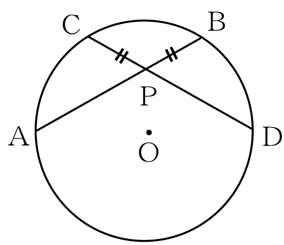


그림 6－48

10. 그림 6－48에서 AB, CD는 두 활줄이고 P는 그 사귐점이다. CP＝PB이면 AP＝PD라는것을 증명하여라.

11. 원 O 및 이 원밖에 한 직선 ℓ이 있다. 원 O에 서로 수직인 두 직경을 긋고 그 연장선들이 직선 ℓ과 사귀는 점을 각각 P, Q로 표시한다. 이때 점 P에서 원둘레 O에 그은 접선이 점 Q에서 원둘레 O에 그은 두 접선과 사귀는 네 점은 한 원둘레에 놓인다는것을 증명하여라.

12. 4각형 ABCD는 원 O에 외접하고 $\angle C = 90°$, P, Q, R, S는 접점이다. 원 O의 반경을 구하여라.(그림 6-49)

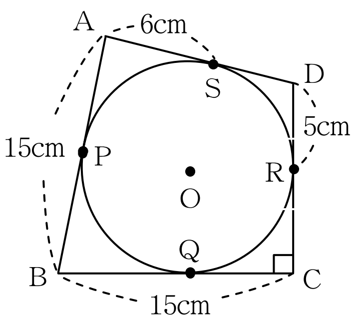


그림 6-49

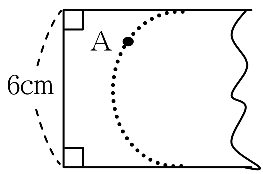


그림 6-50

13. 1) 한 점 A를 지나며 반경이 3cm인 원둘레의 중심들의 모임은 어떤 도형인가?(그림 6-50)

2) 너비 6cm인 비닐판이 있다. 그림 6-50과 같이 한 점 A를 지나는 반원둘레를 따라 베여서 끝을 둥글게 하려고 한다. 선을 어떻게 긋겠는가?

제7장. 무리식

제1절. $\frac{1}{2}$제곱

1. $\frac{1}{2}$제곱

해보기 바른4각형의 한 변의 길이가 x일 때 그 면적은 x^2이다.

1) 바른4각형의 면적이 4라고 하면 변의 길이는 얼마인가?
2) $x^2=4$에 맞는 x의 정수값을 4^m으로 표시하면 m은 어떤 수로 되여야 하겠는가?
3) 바른4각형의 면적이 a일 때 변의 길이 x를 제곱모양으로 표시하여보아라.

> $a \geqq 0$ 일 때 2제곱이 a인 부 아닌 수를
>
> $a^{\frac{1}{2}}$ (밑수: a, 지수: $\frac{1}{2}$)
>
> 으로 표시하고 **《a의 $\frac{1}{2}$제곱》**이라고 읽는다.
>
> $$(a^{\frac{1}{2}})^2=a, \qquad a^{\frac{1}{2}} \geqq 0$$

례 1. $4^2=16$이므로 $16^{\frac{1}{2}}=4$

$8^2=64$이므로 $64^{\frac{1}{2}}=8$

$10^2=100$이므로 $100^{\frac{1}{2}}=10$

$0^2=0$이므로 $0^{\frac{1}{2}}=0$

$\frac{1}{2}$제곱에서는 밑수가 반드시 부 아닌 수여야 한다.

$a^{\frac{1}{2}}$을 $\sqrt{a}$와 같이 쓰고 《**루트** $\boldsymbol{a}$》라고 읽는다.

그리고 $\sqrt{\ }$를 루트(뿌리기호)라고 읽는다.

례 2. $16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4$, $\quad -16^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{16}=-4$

$64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=8$, $\quad 100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$

문 제

1. 다음 같기식이 옳은가를 따져보아라.

1) $169^{\frac{1}{2}}=13$ 2) $3600^{\frac{1}{2}}=60$ 3) $0.09^{\frac{1}{2}}=0.3$

2. 다음 식들가운데서 값을 가지지 않는것은 ( )이다.

1) $\sqrt{0.01}$ 2) $(-4)^{\frac{1}{2}}$ 3) $\sqrt{(-7)^2}$

4) $\sqrt{(-3)^3}$ 5) $-\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ 6) $\sqrt{11}-\sqrt{-1}$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$ 2) $\left(\sqrt{0.23}\right)^2$

3) $\left(\sqrt{\frac{7}{6}}\right)^2$ 4) $\left(\sqrt{(-1.9)^2}\right)^2$

2. 2차뿌리

알아보기 방정식 $x^2=1$의 풀이는 몇개인가? $x^2=25$는?

> $a\geqslant 0$일 때 방정식 $x^2=a$의 풀이를 a의 **2차뿌리**라고 부른다.
>
> a가 정수이면 a의 2차뿌리는 $a^{\frac{1}{2}}$과 $-a^{\frac{1}{2}}$의 2개로서 서로 반대수이다. 0의 2차뿌리는 0뿐이다.

례 1. 1) 방정식 $x^2=9$의 풀이 즉 9의 2차뿌리는

$$9^{\frac{1}{2}}=3, \qquad -9^{\frac{1}{2}}=-3$$

2) 0.25의 2차뿌리는 $0.25=(\pm 0.5)^2$이므로

$$0.25^{\frac{1}{2}}=0.5, \quad -0.25^{\frac{1}{2}}=-0.5$$

례 2. 다음 식에서 x를 구하여라.

$$(x-2)^2=9$$

(풀이) $x-2=\pm 3$

$x-2=3$으로부터 $x=5$

$x-2=-3$으로부터 $x=-1$

문 제

1. 다음 말이 옳은가?

1) -4와 4는 16의 2차뿌리이다.

2) $-\frac{2}{5}$와 $\frac{2}{5}$는 $-\frac{4}{25}$의 2차뿌리이다.

3) -0.15와 0.15는 0.022 5의 2차뿌리이다.

2. 다음 수들의 2차뿌리를 구하여라.

49, $\frac{4}{9}$, 0.01, 1

3. 다음 말이 옳은가?

1) 64의 2차뿌리는 $\sqrt{64}$ 뿐이다.

2) 64의 2차뿌리는 $\pm\sqrt{64}$ 이다.

3) $\sqrt{64}=\pm 8$

4. 다음 식에서 x를 구하여라.

1) $x^2=144$ 2) $x^2=225$

3) $x^2-7=0$ 4) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=4$

5) $25x^2-16=0$ 6) $(x+\sqrt{3})^2=5$

7) $(x+3)^2-36=0$

3. 실 수

분수로 표시되는 수를 유리수라고 불렀다.

수들가운데는 유리수가 아닌 수도 있다. 수 $2^{\frac{1}{2}}$은

$$2^{\frac{1}{2}}=1.414213\cdots$$

로서 분수로 표시할수 없는 비순환무한소수이다.

비순환무한소수로 표시될수 있는 수를 **무리수**라고 부른다.

례 1. $3^{\frac{1}{2}}$, $-2^{\frac{1}{2}}$ 등은 무리수이다.

그러나 $4^{\frac{1}{2}}$, $-9^{\frac{1}{2}}$과 같은 수는 유리수이다.

$\frac{1}{2}$제곱모양이 아닌 무리수도 있다.

원둘레률 $\pi=3.14159\cdots$도 무리수이다.

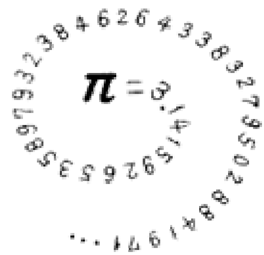


그림 7－1

알아보기 모든 유리수를 수축의 점으로 표시할수 있었다. 그런데 수축의 모든 점을 다 유리수로 표시할수 있겠는가?

유리수와 마찬가지로 무리수도 다 수축의 점으로 표시할수 있다.

례 2. 그림에는 $2^{\frac{1}{2}}$을 수축에 표시하는 방법을 보여준다.

수축에서 $\sqrt{2}$를 표시하는 점과 $-\sqrt{2}$를 표시하는 점은 원점에 관하여 각각 서로 대칭이다.

무리수도 유리수와 같이 끝없이 많으며 정의 무리수, 부의 무리수로 가른다.

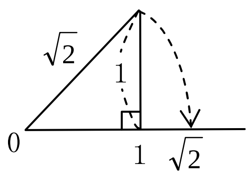


그림 7－2

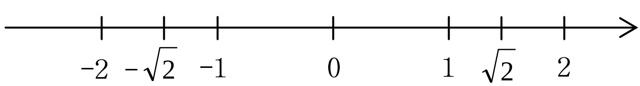


그림 7－3

알아보기 1. 임의의 두 유리수 $a, b(a<b)$에 대하여 $a<c<b$인 유리수 c가 있겠는가?

2. 임의의 두 무리수 $p, q\ (p<q)$에 대하여 $p<r<q$인 무리수 r가 있겠는가?

> 유리수와 무리수를 통털어 **실수**라고 부른다. 수축의 점은 어느것이나 다 실수를 표시한다. 실수 a를 표시하는 점을 간단히 《**점** a》라고 읽는다.

두 실수 a, b에 대하여 $a\pm b$, ab, $\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$도 실수이며 $a\geqq 0$일 때 $a^{\frac{1}{2}}$도 실수이다.

실수전체의 모임을 R, 유리수모임을 Q, 무리수모임을 P로 표시하면

$R=P\cup Q,\quad P=\overline{Q},\quad P,\ Q\subset R$

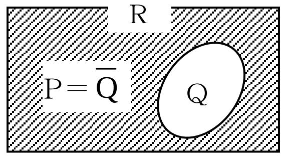


그림 7-4

문 제

1. 수축에 자리표가 $3^{\frac{1}{2}}$인 점을 찍어보아라.

2. 수축에 점 $5^{\frac{1}{2}}$, $-5^{\frac{1}{2}}$을 표시하여라.

3. 그림에서 화살표가 가리키는 점들은 어떤 수를 표시하는가?

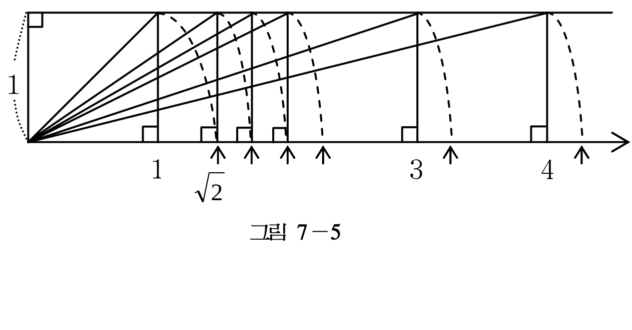


그림 7-5

상 식

무리수의 발견과 피다고라스학파

피다고라스학파에서는 세상만물이 오직 《유리수》 즉 $\frac{m}{n}$ 모양의 수로만 되여있다고 주장하여왔다. 그런데 히빠소스라는 피다고라스의 한 제자는 자기 학파의 상징인 펜타그람마(바른5각형)에서 《유리수》가 아닌 《괴상한》 수를 발견하였다. 그것은 펜타그람마의 한 대각선의 길이였다. 《괴상한》 수는 펜타그람마뿐만아니라 바른4각형과 바른3각형에서도 발견되였다.

피다고라스에게는 《유리수》가 아닌 새로운 수, 무리수가 있다는것이 골칫거리로, 《무서운》 일로 되였다.

그리하여 무리수의 발견자 히빠소스를 바다에 빠뜨려 죽일것을 제자들에게 명령하였다. 이 일이 있은 후 가혹한 피다고라스의 《법률》에 대한 제자들의 반감이 커져서 피다고라스학파는 멸망하고말았다.

련습문제

1. 모임 A의 수에 B의 수들가운데서 그 2제곱인 수를 대응시키는 대응을 화살로 표시하여라. (그림 7−6)

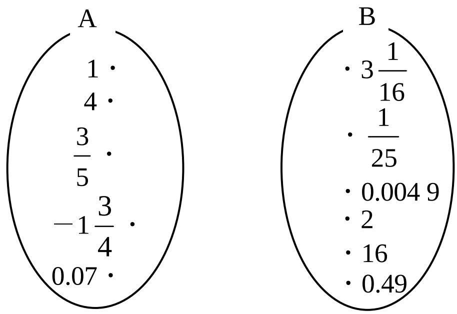


그림 7−6

2. 모임 A의 수에 B의 수들가운데서 부 아닌 2차뿌리를 대응시키는 대응을 화살로 표시하여라. 또한 부인 2차뿌리를 대응시키는 대응을 화살로 표시하여라. (그림 7−7)

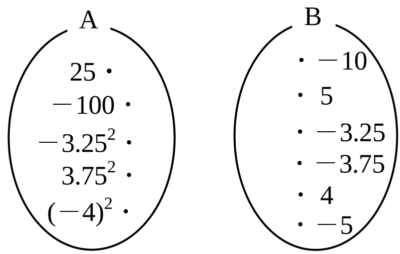


그림 7−7

3. 다음 식들가운데서 뜻을 가지는것과 가지지 않는것을 갈라내여라.

$0.01^{\frac{1}{2}}$, $(-0.01)^{\frac{1}{2}}$, $(7^2)^{\frac{1}{2}}$, $(-7^2)^{\frac{1}{2}}$, $[(-7)^2]^{\frac{1}{2}}$

4. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $(\sqrt{16})^2$ 2) $(-\sqrt{3})^2$ 3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2$

5. 다음 □안에 알맞는 관계기호(=, >, < 가운데서)를 써라.

1) $\sqrt{5}\,\square\,\sqrt{5.3}$ 2) $\dfrac{3}{25}\,\square\,\sqrt{0.12}$

3) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}\,\square\,\sqrt{0.37}$ 4) $-\sqrt{3}\,\square\,-\sqrt{3.5}$

5) $-\sqrt{3}\,\square\,\sqrt{(-3)^2}$

6. 다음것이 옳은가를 따져보아라.

1) 9의 2차뿌리는 $\sqrt{9}$ 뿐이다. 2) 9의 2차뿌리는 $\pm\sqrt{9}$

3) $(\sqrt{3})^2=3$이므로 $(\sqrt{-3})^2=-3$ 4) $\sqrt{-8^2}=|-8|=8$

5) $\sqrt{(-8)^2}=\sqrt{64}=8$

7. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2=25$ 2) $x^2-\dfrac{1}{9}=0$

3) $y^2-\dfrac{25}{64}=0$ 4) $(x+1)^2=2$

8. 다음 같기식이 옳은가?

1) $\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{5^2}+\sqrt{4^2}$ 2) $\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{5^2}-\sqrt{4^2}$

3) $\sqrt{(-2)(-8)}=\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8}$ 4) $\sqrt{\dfrac{-9}{-25}}=\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-25}}$

9. 다음 수들을 유리수와 무리수로 갈라보아라.

0.4, $-\dfrac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$, $-\pi$, $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$, $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$, $-\dfrac{\sqrt{9}}{3}$

10. 다음 실수들을 수축에 표시하여라.

1.5, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, 3.6

제2절. $\frac{1}{2}$제곱의 계산

1. $\frac{1}{2}$제곱의 성질

어떤 수 B가 $A^{\frac{1}{2}}$이라는것을 말하자면 $\frac{1}{2}$제곱의 정의로부터 다음 두가지를 따져보면 된다.

1) $B^2=A$　　　　　　2) $B\geqq 0$

해보기 다음 두 식의 값을 비교하여라.

1) $(4\cdot 9)^{\frac{1}{2}}$과 $4^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{2}}$

2) $(25\cdot 100)^{\frac{1}{2}}$과 $25^{\frac{1}{2}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$

성질 1. (적의 $\frac{1}{2}$제곱) $a\geqq 0$, $b\geqq 0$일 때

$$(ab)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$$

3개이상의 부 아닌 수 a, b, ⋯ , h에 대해서도 이 성질이 성립한다. 즉

$$(ab\ \cdots\ h)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\ \cdots\ h^{\frac{1}{2}}$$

례 1. 1) $(4\cdot 36)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}\cdot 36^{\frac{1}{2}}=2\cdot 6=12$

2) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}=(3\cdot 27)^{\frac{1}{2}}=81^{\frac{1}{2}}=9$

례 2. $7056^{\frac{1}{2}}$을 계산하여라.

(풀이) 7 056을 씨인수분해하면

$$7056=2^4\cdot3^2\cdot7^2$$

따라서 $7056^{\frac{1}{2}}=(2^4\cdot3^2\cdot7^2)^{\frac{1}{2}}$

$$=(2^4)^{\frac{1}{2}}\cdot(3^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(7^2)^{\frac{1}{2}}=2^2\cdot3\cdot7=84$$

$a\geqslant0$일 때

$$(a^{2m})^{\frac{1}{2}}=(\underbrace{a^2\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^2}_{m\text{개}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\cdots\cdot(a^2)^{\frac{1}{2}}=a^m$$

그러므로

$$(a^{2m})^{\frac{1}{2}}=a^m$$

례 3. $(4x^6)^{\frac{1}{2}}=(2^2\cdot x^{2\cdot3})^{\frac{1}{2}}=2x^3\ (x\geqslant0)$

문 제

1. 적의 $\frac{1}{2}$제곱에 관한 성질을 말로 표현해보아라.

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $(9\cdot64)^{\frac{1}{2}}$ 2) $(1.44\cdot0.81)^{\frac{1}{2}}$

3) $(16\cdot9\cdot64)^{\frac{1}{2}}$ 4) $(64\cdot16\cdot25)^{\frac{1}{2}}$

3. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ 2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$

4) $\sqrt{324}$ 5) $\sqrt{3136}$ 6) $\sqrt{5184}$

해보기 다음 두 식의 값을 계산하고 그 값을 비교하여라.

1) $\left(\frac{81}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$ 과 $\frac{81^{\frac{1}{2}}}{100^{\frac{1}{2}}}$　　2) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 과 $\frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}$

성질 2. (상의 $\frac{1}{2}$ 제곱) $a \geqslant 0$, $b > 0$ 일 때

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$$

례 4. 1) $\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{16^{\frac{1}{2}}}{49^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{7}$　　2) $\frac{294^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{294}{6}\right)^{\frac{1}{2}} = 49^{\frac{1}{2}} = 7$

문 제

1. 상의 $\frac{1}{2}$제곱에 관한 성질을 말로 표현해보아라.

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\left(\frac{100}{144}\right)^{\frac{1}{2}}$　　2) $\left(\frac{196}{256}\right)^{\frac{1}{2}}$　　3) $\sqrt{\frac{49}{25 \cdot 36}}$

4) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$　　5) $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{360}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{5}}$　　6) $\frac{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2}}$

3. 다음 같기식이 성립하는가를 따져보아라.

$(a \cdot 10^{2m})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot 10^m$　($a > 0$, m은 옹근수)

2. $\frac{1}{2}$제곱의 계산

주어진 수를 오른쪽으로부터 두개의 수자씩 토막으로 끊어갈 때 그 토막의 수가 구하려는 $\frac{1}{2}$제곱수의 자리수와 같다.

례 1. 1) $(21\vdots62\vdots38)^{\frac{1}{2}}$은 세자리수이다.

2) $\sqrt{5\vdots60\vdots37\vdots62}$는 네자리수이다.

해보기 다음 계산과정을 보고 $\frac{1}{2}$제곱을 어떻게 계산할수 있는가를 설명해보아라.

$$30 < 1156^{\frac{1}{2}} < 40$$

따라서

$$1156=(30+k)^2$$
$$1156=900+2\cdot30k+k^2$$
$$1156-900=2\cdot30k+k^2$$
$$256=(2\cdot30+k)k$$

$$\begin{array}{l|l} 30 & \\ 30 & k \\ \hline 60+k & 256 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & \\ 30 & 4 \\ \hline 60+4 & 256 \\ 4 & 256 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3\ \ 4 \\ \cline{2-2} 3 & 11\ 56 \\ 3 & 9 \\ \hline 64 & 2\ 56 \\ 4 & 2\ 56 \\ \hline & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

례 2. 다음것을 구하여라.

1) $405769^{\frac{1}{2}}$　　　　2) $\sqrt{5}$

(풀이)

1)

	6 3 7
6	40 57 69
6	36
123	4 57
3	3 69
1267	88 69
7	88 69
	0

2)

	2. 2 3 6
2	5. 00 00 00
2	4
42	1 00
2	84
443	16 00
3	13 29
4466	2 71 00
6	2 67 96
4472	4 04
…	…

$405769^{\frac{1}{2}}=637$ $\sqrt{5}=2.236\cdots$

소수의 $\frac{1}{2}$제곱을 구하는 경우에 소수부는 소수점으로부터 오른쪽으로 가면서 두자리씩 구분해야 한다.

례 3. $\sqrt{316.4841}$을 구하여라.

(풀이)

	1 7. 7 9
1	3 16. 48 41
1	1
27	2 16
7	1 89
347	27 48
7	24 29
3549	3 19 41
9	3 19 41
	0

$\sqrt{316.4841}=17.79$

례 4. $\sqrt{316.7}$ 을 전자수산기로 구하여라.

(풀이) 316.7 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\longrightarrow$ 17.796066≈17.80

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $1369^{\frac{1}{2}}$ 2) $\sqrt{7921}$

3) $\sqrt{0.2116}$ 4) $56.7009^{\frac{1}{2}}$

2. 다음것을 소수점아래 셋째 자리까지 구하여라.

1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{8}$

련습문제

다음 식의 값을 구하여라. (1—3)

1. 1) $(0.81\times 49)^{\frac{1}{2}}$ 2) $(0.49\times 36\times 0.01)^{\frac{1}{2}}$ 3) $2^{\frac{1}{2}}\cdot 128^{\frac{1}{2}}$

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ 5) $13^{\frac{1}{2}}\cdot 52^{\frac{1}{2}}$ 6) $\left(\frac{36\times 15}{49\times 25}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. 1) $(9^3)^{\frac{1}{2}}$ 2) $(4\cdot 3^4)^{\frac{1}{2}}$ 3) $(25^3)^{\frac{1}{2}}$

3. 1) $10000^{\frac{1}{2}}$ 2) $0.36^{\frac{1}{2}}$ 3) $3\cdot 16^{\frac{1}{2}}$

4) $0.1\cdot 900^{\frac{1}{2}}$ 5) $-\frac{1}{2}\cdot 0.64^{\frac{1}{2}}$ 6) $196^{\frac{1}{2}}$

4. $\sqrt{120a}$ 의 값이 옹근수로 되기 위해서는 a가 어떤 옹근수로 되여야 하는가? 이때 a의 제일 작은 0 아닌 옹근수값을 구하여라.

제3절. 뿌리식의 변형

$\sqrt{x+1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{a-5}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}+1$과 같이 뿌리기호가 들어있는 식을 **뿌리식**이라고 부른다. 특히 밑수에 변수가 들어있는 뿌리식을 **무리식**이라고 부른다.

례 1. $\sqrt{a-5}$ 는 $a-5\geqslant 0$ 즉 $a\geqslant 5$일 때에만 뜻을 가진다. 즉 $\sqrt{a-5}$ 의 뜻구역은 $[5, +\infty)$이다.

해보기 $a=5$, $a=-5$일 때 $\sqrt{a^2}$ 의 값을 구하여라.

일반적으로 $a\geqslant 0$일 때에는 $\sqrt{a^2}=a$이고 $a<0$일 때는 $\sqrt{a^2}=-a$이다. 이것을 하나의 식으로 묶으면 다음의 공식을 얻는다.

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

이 공식을 써서 뿌리식을 간단히 변형할수 있다.

례 2. 1) $a\geqslant 0$일 때

$$\sqrt{0.04a^2}=\sqrt{(0.2a)^2}=|0.2a|=0.2a$$

2) $b\geqslant 0$일 때

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=|ab|=|a|b$$

례 3. $\sqrt{(x-4)^2}=|x-4|=\begin{cases} x-4, & x\geqslant 4 \\ 4-x, & x<4 \end{cases}$

문 제

1. 다음 뿌리식의 뜻구역을 구하여라.

$\sqrt{4-x}$, $\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$, $\sqrt{1+x^2}$

2. $(ab)^{\frac{1}{2}}$ 은 a, b가 어떤 값을 가질 때 뜻을 가지는가?

3. 다음 계산이 옳은가?

1) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$ 2) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{2}{3}$

3) $\sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}=4$ 4) $\sqrt{(-4)^2}=|-4|=4$

4. 다음 식을 변형하여라.

1) $\sqrt{(-16)^2}$ 2) $\sqrt{2.1^2}$ 3) $\sqrt{0.02^2}$

4) $\sqrt{(-0.82)^2}$ 5) $\sqrt{9x^2}$ 6) $\sqrt{x^4}$

7) $\sqrt{a^2+2a+1}$ 8) $\sqrt{4b^2-4b+1}$ 9) $\sqrt{a^2b^2}$

5. □안에 알맞는 크기기호를 써넣어라.

1) $\sqrt{(x+5)^2}=-(x+5)$ $(x\square-5)$ 2) $\sqrt{(3-x)^2}=x-3$ $(x\square 3)$

3) $\sqrt{(2x-1)^2}=1-2x$ $\left(x\square\frac{1}{2}\right)$

례 4. 다음 뿌리식에서 인수를 뿌리기호밖으로 내보내여라.

1) $\sqrt{0.08}$ 2) $\sqrt{4a^7}$ $(a\geqslant 0)$ 3) $\sqrt{a^3b^5}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

(풀이) 1) $\sqrt{0.08}=\sqrt{\frac{8}{100}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{10}=\frac{2}{10}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$

2) $\sqrt{4a^7}=\sqrt{(2a^3)^2a}=\sqrt{(2a^3)^2}\sqrt{a}=2a^3\sqrt{a}$

3) $\sqrt{a^3b^5}=\sqrt{(ab^2)^2ab}=\sqrt{(ab^2)^2}\sqrt{ab}=ab^2\sqrt{ab}$

례 5. 다음 뿌리식에서 인수를 뿌리기호안에 넣어라.

1) $3\sqrt{5}$ 2) $5\sqrt{\frac{a}{10}}$ 3) $\sqrt{5}\,b$

(풀이) 1) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$

2) $5\sqrt{\frac{a}{10}}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{\frac{a}{10}}=\sqrt{25\cdot\frac{a}{10}}=\sqrt{\frac{5}{2}a}$

3) $b \geqq 0$이면 $b=\sqrt{b^2}$ 이므로

$\sqrt{5}b=\sqrt{5}\sqrt{b^2}=\sqrt{5b^2}$

$b<0$이면 $-b=\sqrt{b^2}$ 이므로 $b=-\sqrt{b^2}$

따라서 $\sqrt{5}b=-\sqrt{5}\cdot\sqrt{b^2}=-\sqrt{5b^2}$

문 제

1. 다음 뿌리식에서 뿌리기호밖으로 내보낼수 있는 인수를 다 내보내여라.

1) $\sqrt{12x^2}$ 2) $\sqrt{45a^7}$

3) $\sqrt{-18x^3}$ 4) $\sqrt{\dfrac{4a^2b^4}{25c^2d^8}}$

2. 다음 뿌리식에서 인수를 뿌리기호안에 넣어라.

1) $5\sqrt{10}$ 2) $\dfrac{1}{3}\sqrt{27}$

3) $\sqrt{2}a$ $(a \geqq 0)$ 4) $\sqrt{3}b$ $(b<0)$

3. 같기식 $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$ 가 성립하는 때는 ( )이다.

1) $a \geqq 0$, $b>0$ 2) $a>0$, $b \geqq 0$

3) $a<0$, $b \geqq 0$ 4) $a \leqq 0$, $b<0$

$-3\sqrt{2}$, $\dfrac{2}{5}\sqrt{2}$ 와 같이 뿌리밑수가 같은 뿌리식을 **한또래뿌리식**이라고 부른다.

뿌리식에서도 여러마디식에서와 같이 더하기와 곱하기의 바꿈법칙, 묶음법칙이 성립한다. 그러므로 한또래뿌리식의 정돈에서도 여러마디식이나 분수식을 변형할 때와 같이 정돈, 인수분해 등을 할수 있다.

례 6. 식 $3\sqrt{2}+\sqrt{x}-\sqrt{2}-3\sqrt{x}$ 를 정돈하여라.

(풀이) 한또래뿌리식들을 정돈하면

$$3\sqrt{2}+\sqrt{x}-\sqrt{2}-3\sqrt{x}=(3\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{x}-3\sqrt{x})$$

$$=(3-1)\sqrt{2}+(1-3)\sqrt{x}=2\sqrt{2}-2\sqrt{x}$$

> 분모(또는 분자)에서 뿌리기호를 없애는것을 분모(또는 분자)를 **유리화한다**고 말한다.

례 7. 다음 뿌리식의 분모를 유리화하여라.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

(풀이) 1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

문 제

1. 다음 식을 정돈하여라.

1) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}$ 2) $\sqrt{25a^5}+4a\sqrt{a^3}-a^2\sqrt{a}$

2. 분모를 유리화하여라.

1) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ 2) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$

3) $\dfrac{a+b}{2\sqrt{a^2-b^2}}$ 4) $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

3. 분자를 유리화하여라.

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a^2+b^2}$

련습문제

1. 다음 뿌리식은 x의 어떤 값에 대하여 뜻을 가지는가?

1) $\sqrt{4(x+2)}$ 2) $\sqrt{-x}$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

2. 어떤 x의 값에 다음 같기식이 성립하는가?

1) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ 2) $\sqrt{4x^2+4x+1}=1+2x$

3. 다음 식을 간단하게 변형하여라.

1) $\sqrt{0.01a^2}$ $(a>0)$　　2) $\sqrt{\dfrac{x^2}{100}}$ $(x<0)$

3) $\sqrt{(4-m)^2}$ $(m \geqq 4)$　　4) $\sqrt{(c+3)^2}$ $(c<-3)$

4. 어떤 글자의 값에 다음 같기식이 성립하는가?

1) $\sqrt{a^2}=-a$　　2) $\sqrt{b^6}=b^3$

3) $-\sqrt{x^4}=-x^2$　　4) $\sqrt{m^{10}}=m^5$

5. 뿌리기호밖으로 내보낼수 있는 인수는 다 내보내여라.

1) $\sqrt{28}$　　2) $\sqrt{63}$　　3) $\sqrt{432}$

4) $\dfrac{\sqrt{72}}{2}$　　5) $\sqrt{9a^2b}$ $(a<0,\ b>0)$

6. 인수를 뿌리기호안에 넣어라.

1) $20\sqrt{7}$　　2) $-5\sqrt{\dfrac{2}{5}}$　　3) $0.5\sqrt{0.4}$

7. 다음 □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{7-2\sqrt{21}+\square}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{\square}}=\sqrt{\square}-\sqrt{\square}$

2) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\square}+\sqrt{\square}$　　3) $\sqrt{8-2\sqrt{\square}}=\sqrt{\square}-\sqrt{3}$

8. 다음 식변형에서 틀린것을 찾아라.

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{1-2\sqrt{5}+5}=\sqrt{1^2-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}=1-\sqrt{5}$$

9. 다음 같기식이 옳은가?

1) $\sqrt{64+36}=\sqrt{64}+\sqrt{36}$　　2) $\sqrt{25-16}=\sqrt{25}-\sqrt{16}$

10. 다음 계산을 하여라.

1) $\sqrt{32}+\sqrt{98}-\sqrt{200}$　　2) $\sqrt{12}-\sqrt{72}+2\sqrt{18}-10\sqrt{3}$

3) $\dfrac{1}{3}\sqrt{18}+\dfrac{1}{2}\sqrt{8}-\dfrac{1}{5}\sqrt{50}$　　4) $(5\sqrt{a}-3\sqrt{25a})-(2\sqrt{36a}-2\sqrt{9a})$

11. 분모를 유리화하여라.

1) $\frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$　　2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　　3) $\frac{4}{\sqrt{5}-3}$

4) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$　　5) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}}$　　6) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

12. 분자를 유리화하여라.

1) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}$　　2) $\frac{\sqrt{12}+1}{\sqrt{12}-1}$　　3) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}$

4) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$　　5) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$　　6) $\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$

13. 다음 식을 정돈하여라.

1) $\sqrt{2}-\sqrt{3}+5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$　　2) $5\sqrt{7}-3\sqrt{11}-4\sqrt{7}+2\sqrt{11}$

3) $\sqrt{x}+2\sqrt{x}+3\sqrt{x}$　　4) $\sqrt{a}+5\sqrt{a}-3\sqrt{a}$

14. 식 $\frac{3\sqrt{x+1}+5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ 를 간단히 하여라.

15. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\frac{1}{3-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

2) $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{98}}{\sqrt{128}-\sqrt{147}}$

복습문제

1. $a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이겠는가?

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sqrt{7225}$　　2) $\sqrt{14400}$

3) $\sqrt{10^4}$　　4) $\sqrt{\frac{121}{4225}}$

3. $a>0$, $b>0$일 때 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 와 $\sqrt{a+b}$ 는 어느것이 큰가?

4. 원의 반경을 2배, 3배, $\frac{1}{2}$배 하면 면적은 각각 몇배로 되는가?

5. 면적이 각각 다음과 같은 원의 반경을 구하여라.

$24\mathrm{m}^2$, $200\mathrm{m}^2$

6. $a<0$, $b<0$일 때 $(ab)^{\frac{1}{2}}$과 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$을 뿌리식의 적과 상의 모양으로 변형하여라.

7. a와 b가 어떤 값을 가질 때 다음 같기식이 옳은가?

1) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$　　2) $\sqrt{a^4b}=a^2\sqrt{b}$

3) $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$　　4) $\sqrt{a^6b}=a^3\sqrt{b}$

8. a와 b가 어떤 값을 가질 때 다음 뿌리식이 의미를 가지는가?

1) $\sqrt{a^2b^2}$　　2) $\sqrt{(a+b)^2}$

3) $\sqrt{-ab^2}$　　4) $\sqrt{a^2b}$

9. 다음 같기식에서 옳지 않은것을 고쳐보아라.

1) $\sqrt{0.04}=0.02$　　2) $\sqrt{(-0.3)^2}=-0.3$

3) $\sqrt{3^2+4^2}=3+4=7$

10. 다음 계산에서 틀린것을 찾아보아라.

$m<n$일 때

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2$$

$$(m-n)^2=(n-m)^2$$

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2}$$

$$m-n=n-m$$

따라서 $m=n$

11. 다음 식을 계산하여라.

1) $\frac{1}{5}\sqrt{200}+2\sqrt{50}-4\sqrt{8}$

2) $8\sqrt{2\frac{3}{4}}+14\sqrt{\frac{11}{49}}-\sqrt{44}-\sqrt{275}$

3) $\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1.6}+3\sqrt{0.4}\right)$

4) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)$

5） $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{n}{m}}-\frac{ab}{n}\sqrt{mn}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{n}{m}}\right)\cdot a^2b^2\sqrt{\frac{n}{m}}$

6） $\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab\right)\div\sqrt{ab}$ （$a\geqslant0$，$b\geqslant0$）

12. 다음 뿌리식을 통분하고 정돈하여라.

1） $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$　　2） $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

3） $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$　　4） $\frac{1}{a+a\sqrt{b}}-\frac{1}{a-a\sqrt{b}}$

13. 다음 뿌리식의 분모를 유리화하여라.

1） $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$　　2） $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

3） $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$　　4） $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

14. 다음것이 옳은가를 따져보아라.

1） $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\sqrt{4\cdot5}}=\sqrt{4-2\sqrt{4\cdot5}+5}$

$=\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$

2） $\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{2+2\sqrt{2\cdot5}+5}$

$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}=|\sqrt{2}+\sqrt{5}|=\sqrt{2}+\sqrt{5}$

15. $x+y=6$ ， $xy=4$， $x>y$ 일 때 식 $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 의 값을 구하여라.

16. $x=a+\sqrt{a^2-1}$ 일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1） $x+\frac{1}{x}$　　2） $x^2+\frac{1}{x^2}$

제8장. 1차함수와 2차함수

제1절. 함 수

1. 함수의 의미

해보기 1차식 $y=2x+3$에서 변수 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때 y의 값을 구하여라.

1차식 $y=2x+3$을 $f(x)=2x+3$과 같이 표시하면 편리할 때가 많다.

$f(x)=2x+3$에서

$$f(-1)=2\cdot(-1)+3=1$$
$$f(0)=2\cdot 0+3=3$$
$$f(1)=2\cdot 1+3=5$$
$$f(2)=2\cdot 2+3=7$$

여기서 f는 《2에 변수 x를 곱한 적에 3을 더한다.》는 규칙을 나타낸다. 서로 다른 규칙들은 f, g, h와 같이 서로 다른 글자로 표시하여 구별한다.

례 1. $f(x)=2x^2-1$에서 f는 《변수 x의 2제곱에 2를 곱한 적에서 1을 던다.》라는 규칙을 나타낸다.

이때

$$f(1)=2\cdot 1^2-1=2-1=1$$
$$f(0)=2\cdot 0-1=-1$$
$$f(-3)=2\cdot(-3)^2-1=18-1=17$$

례 2. 《변수 x의 a배에 b를 더한다.》는 규칙을 g라고 하고 이 규칙을 식으로 표시하면 $g(x)=ax+b$

이때

$$g(0)=a\cdot 0+b=b$$
$$g(2)=a\cdot 2+b=2a+b$$
$$g(-2)=a(-2)+b=-2a+b$$

문 제

1. $f(x)=3x^2-x+2$에서 다음것을 구하여라.

   1) $f(1)$ 2) $f(0)$ 3) $f(-1)$ 4) $f(-3)$ 5) $f(-10)$

2. $g(x)=5-2x$에서 g는 어떤 규칙을 나타내는가? $g(-3)$, $g(0)$, $g(4)$를 구하여라.

알아보기 1차식 $y=3x-2$를 $y=f(x)$로 표시한다면 f는 어떤 규칙을 나타내겠는가?

이 규칙에 따라 다음 표의 빈칸에 알맞는 값을 써넣어라.
변수 x의 매개 값에 대응되는 변수 y의 값은 몇개씩인가?

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-8					…

> 어떤 규칙 f에 의하여 변수 x의 매개 값에 변수 y의 값이 꼭 하나씩 대응되면 이 규칙 f를 **함수**라고 부르고
>
> $$x \xrightarrow{f} y \quad \text{또는} \quad y=f(x)$$
>
> 와 같이 표시한다. 이때 x를 **독립변수**, y를 **종속변수**라고 부른다.

규칙 f는 보통 식으로 준다.
여기서 $f(x)$는 대응규칙도 표시하고 종속변수도 표시한다.

례 3. 1차식 $y=2x-3$은 함수이다.

그것은 x의 매개 값에 그의 2배에서 3을 던 차의 값을 하나씩 대응시키는 규칙을 나타내기때문이다.

례 4. 2차식 $y=3x^2+1$은 함수이다. 이때 규칙 f는 x의 매개 값에 그의 2제곱의 3배보다 1만큼 큰 y의 값을 하나씩 대응시키는것이다. 즉 $f(x)=3x^2+1$

함수 $y=f(x)$에서 $x=a$일 때 함수의 값 $f(a)$를 정할수 있으면 이 함수는 $x=a$에서 값을 가진다 또는 뜻을 가진다고 말한다.

이때 함수 $f(x)$는 x에서의 함수값을 나타내기도 하고 주어진 x의 값에 대응하는 함수값을 정하는 규칙을 나타내기도 한다.

알아보기 함수 $y=2x$와 $y=\frac{x^2}{x}$는 어디에서 뜻을 가지는가?

> 함수 $y=f(x)$가 값을 가지는 독립변수 x값전부의 모임을 이 함수의 **뜻구역**, 함수값전부의 모임을 이 함수의 **값구역**이라고 부른다.

례 5. 함수 $f(x)=2x+1$의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

(풀이) $f(x)=2x+1$은 x의 모든 값에서 뜻을 가진다.

그러므로 함수의 뜻구역은 $(-\infty, +\infty)$, 값구역은 $(-\infty, +\infty)$

함수가 정해지자면 그 함수의 뜻구역과 대응규칙이 정해져야 한다.

여기서 대응규칙을 셈식으로 줄 때 뜻구역에 대하여 아무말이 없으면 그 식이 값을 가지는 수전부의 모임을 뜻구역으로 본다.

알아보기 함수 $y=x+10$과 $s=t+10$은 서로 다른 함수인가 같은 함수인가?

함수를 표시하는 글자가 달라도 대응규칙이 같으면 같은 함수로 본다.

문제

1. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=3x-1$　　2) $y=\frac{x}{x+1}$

2. 다음 규칙이 함수라는것을 밝히고 그것의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

1) $f(x)=0.25x-0.7$　　2) $g(x)=|x-0.3|$

3. 다음 물음에 대답하여라.

1) 바른4각형의 한 변을 $x$cm, 그 둘레를 $y$cm로 표시할 때 y는 x의 함수인가?

2) 반경이 r인 원의 둘레를 S로 표시할 때 S는 r의 함수인가?

2. 함수의 그라프

함수는 자리표평면에 찍은 점들의 모임으로 표시할수도 있다.

> 함수 $y=f(x)$의 독립변수의 값과 그것에 대응하는 종속변수의 값을 자리표로 가지는 점전부의 모임 $\{(x, y)\}$를 그 **함수의 그라프**라고 부른다.

례 1. 함수 $f(x)=-\frac{3}{2}x+2$는 1차식 $y=-\frac{3}{2}x+2$를 표시하므로 그 그라프는 그림 8－1과 같은 직선이다.

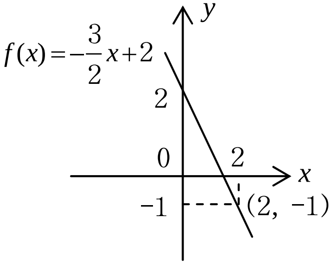


그림 8－1

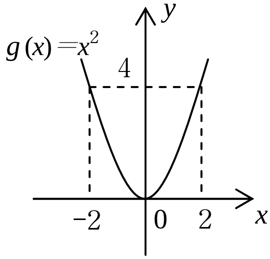


그림 8－2

례 2. 함수 $g(x)=x^2$의 그라프는 2차식 $y=x^2$의 그라프와 같다.(그림 8－2)

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=0.5x$　　2) $y=-\frac{1}{2}x^2$

3) $y=-0.5x-1$　　4) $y=3x^2$

2. 함수 $y=\frac{x}{|x|}$의 그라프를 그려라. 그리고 뜻구역과 값구역을 말하여라.

련습문제

1. 다음 글에서 y가 x의 2차식으로 되는것은 (　　)이다.

1) 반경이 $x$cm인 원의 면적은 $y\text{cm}^2$이다.

2) 대각선의 길이가 $x$cm인 바른4각형의 면적은 $y\text{cm}^2$이다.

3) 가로가 $a$cm, 세로가 $x$cm인 직4각형의 면적은 $y\text{cm}^2$이다.

2. 3각형의 밑변을 12cm, 높이를 $h$cm, 면적을 Scm^2로 표시할 때 S는 h의 함수인가? 뜻구역을 어떤 수모임으로 정할수 있는가?

3. 다음 규칙이 함수라는것을 밝히고 지적된 함수값을 구하여라.

1) $f(t)=-5t+2$, $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{5}\right)$

2) $f(t)=8t+1$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(100)$

4. $f(x)=1-3x^2$일 때 $f(-2)=f(2)$, $f(-3)=f(3)$으로 되는가 따져보아라.

5. $f(x)=|0.5x|$일 때 f가 표시하는 규칙을 말하고 $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(100)$을 구하여라.

6. x를 독립변수로 하는 함수 $y=x^2$과 y를 독립변수로 하는 함수 $x=y^2$은 같다. 왜 그런가?

7. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=-\frac{1}{3}x+1$　　　　2) $y=\frac{1}{3}x^2$

제2절. 1차함수

1. 1차함수의 의미

> 독립변수에 관하여 1차식으로 표시되는 함수를 **1차함수**라고 부른다. 1차함수의 일반모양은 다음과 같다.
>
> $$y=ax+b\ (a\neq 0)$$

특히 $b=0$이면

$$y=ax$$

이것은 비례관계를 표시하는 가장 간단한 1차함수이다.

생활에서는 1차함수로 표시되는 현상들을 많이 볼수 있다.

례 1. 처음온도가 12℃인 물을 덥힌다. 매 분마다 물의 온도가 0.5℃씩 올라간다고 하면 x분후의 물의 온도 y는 다음 관계식으로 표시된다.

$$y=0.5x+12$$

즉 물의 온도 y는 시간 x의 1차함수이다.

례 2. 쇠줄의 길이는 온도가 변하는데 따라 늘거나 준다. 온도가 0℃일 때 쇠줄의 길이가 10m였다. 온도가 1℃만큼 오르거나 내릴 때 쇠줄의 길이가 0.12mm만큼 늘거나 준다고 하면 온도가 t℃일 때 쇠줄의 길이 ℓ은 다음 관계식으로 표시된다.

$$\ell=0.00012t+10$$

즉 쇠줄의 길이 ℓ은 온도 t의 1차함수이다.

문 제

1. 다음 식으로 주어진 함수들가운데서 1차함수를 찾아보아라.

1) $y=-5x+1$ 2) $y=2(x+1)$ 3) $y=1-x^2$

4) $y=\frac{2}{x-1}$ 5) $y=\frac{x}{5}$

2. 다음 글에서 y는 x의 1차함수인가?

1) 반경이 $x$cm인 원둘레의 길이 $y$cm

2) 변의 길이가 $x$cm인 바른4각형의 면적 $y\text{cm}^2$

3) 한 뾰족각이 $x°$인 직3각형의 다른 뾰족각 $y°$

3. $y-2$가 $x-3$에 비례하며 x의 값 1에 대응하는 y의 값은 5이다.

1) y는 x에 관한 어떤 식으로 표시되는가?

2) y는 x의 1차함수인가?

4. 다음 1차함수의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

1) $y = x + 3$　　　　2) $s = -1 - t$

3) $u = \frac{2}{3}v - 0.5$　　　　4) $y = 0.3x - 0.1$

5. 한 통신원이 지점 A로부터 12km 떨어진 지점 B까지 4km/h의 속도로 갔다가 그 길로 돌아와야 한다. 이 통신원이 지점 A를 떠나 x시간후에 A로부터 $y$km 되는 지점을 지나게 된다.

1) 통신원이 지점 A로부터 B까지 갈 때 지나는 거리 y는 어떤 식으로 표시되는가? 또 x는 어떤 값을 잡을수 있는가?

2) 통신원이 지점 B에서 A로 돌아올 때 y는 어떤 식으로 표시되는가? 또 x는 어떤 값을 잡을수 있는가?

2. 1차함수의 그라프와 그의 변화

알아보기 다음 □안에 알맞는것을 써넣어라.

1) $y = 2x + 1$의 그라프는 두 점 (0, □), (□, 0)을 지나는 직선이다.

2) $y = 2x + 1$의 그라프는 $y = 2x$의 그라프를 y축의 정방향으로 □만큼 평행이동한 직선이다.

1차함수 $y = ax + b$는 1차식이다.

그러므로 1차함수 $y = ax + b$의 그라프는 직선 $y = ax$를 y축의 정방향으로 b만큼 평행이동하여 얻을수 있다.

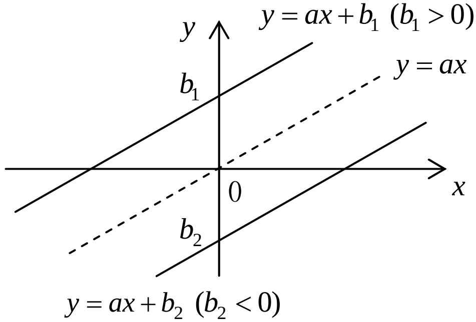


그림 8－3

1차함수 $y=ax+b$ 의 그라프가 a 와 b 의 값의 변화에 따라 어떻게 변하는가를 보자.

알아보기 $y=0.5x+b$에서 b의 값을 -2, -1, 0, 1, 2와 같이 주면 그라프는 어떻게 되는가?

함수 $y=ax+b$ 의 그라프는 b 가 커짐에 따라 y축의 정방향으로 평행이동된다.

해보기 함수 $y=2x+3$과 $y=-2x+3$의 그라프를 그리고 비교하여보아라.

$y=ax+b$ 의 그라프의 방향은 a 의 값의 부호를 보고 판정할수 있다. (그림 8－4)

$a>0$이면 이 그라프는 오른쪽으로 감에 따라 우로 오르는 직선이고 $a<0$이면 아래로 내리는 직선이다.

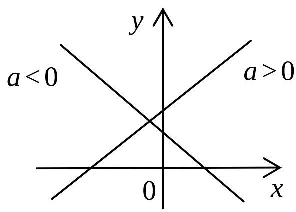


그림 8－4

알아보기 $y=ax+2$ 에서 a 의 값을 -2, -1, 0, 1, 2와 같이 변화시키면 그라프가 어떻게 움직이겠는가?

함수 $y=ax+b$ 의 그라프는 a 의 값이 커짐에 따라 점 $(0,\ b)$ 를 중심으로 하여 시계바늘이 도는 방향과 반대방향으로 돈다.

결수 a 는 함수 $y=ax+b$ 가 표시하는 직선의 기울어진 정도 즉 방향을 정한다. 그러므로 결수 a 를 **직선의 방향결수**라고 부른다.

례 1. 함수 $y=0.9x-3$과 $y=0.9x+0.5$는 직선의 방향결수가 같다.

그러므로 이 두 함수의 그라프는 서로 평행인 직선이다.

이처럼 $y=ax+b$ 에서 a 와 b의 값을 알면 이 함수의 그라프가 자리표평면에서 어디에 놓이는 직선인가를 쉽게 알수 있다.

례 2. 함수 $y=3x+2$의 그라프가 어떤 직선인가를 말해보아라.

(풀이) 방향결수가 $a=3>0$이고 $b=2$이므로 이 함수의 그라프는 점 (0, 2)를 지나며 오른쪽으로 가면서 우로 오르는 직선이다.

문 제

1. 다음 함수들의 방향결수를 말하여라. 어느 함수의 그라프가 서로 평행인가?

1) $y=-5x+2$, $y=0.5x+2$, $y=-5x-100$

2) $y=3-6x$, $y=3-60x$, $y=60-6x$, $y=x-6$

2. 다음 함수의 그라프는 어떤 직선인가?

1) $y=0.2x+1$ 2) $y=-0.6x-2$ 3) $y=-3x+2$

4) $y=0 \cdot x+1$ 5) $2y=-3x$

3. 함수 $y=ax+b$ 의 그라프는 a 와 b 의 값이 얼마일 때

1) 함수 $y=7x-3$의 그라프와 일치하는가?

2) 함수 $y=7x-3$의 그라프와 평행인가?

3) 함수 $y=7x-3$의 그라프와 사귀는가?

3. 1차함수값의 증가와 감소

함수 $y=ax+b$의 그라프를 보면 그 함수의 값이 어떻게 변하는가를 알수 있다. 그림 8-5는 각각 함수 $y=2x+1$과 $y=-2x+1$의 그라프이다.

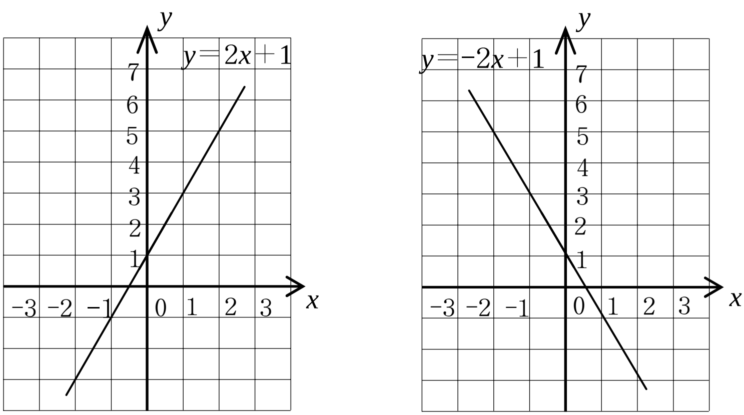


그림 8-5

알아보기 1. 함수 $y=2x+1$의 그라프를 보면서 다음 물음에 대답하여라.

1) x가 1에서 3까지 2만큼 늘 때 함수값은 얼마나 변하는가?

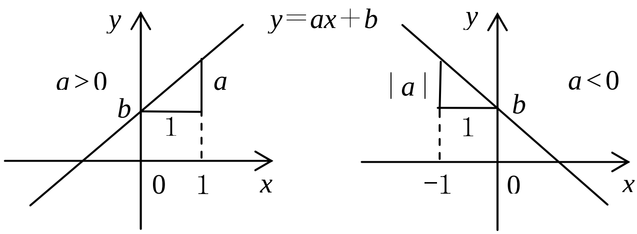
2) x의 값이 늘면 함수값도 느는가?

2. 함수 $y=-2x+1$의 그라프를 보면서 우에서와 꼭같은것을 알아보아라.

함수 $y=ax+b$에서

1) $a>0$일 때 독립변수 x의 값이 늘면 함수 y의 값도 는다. 이때 함수는 **증가한다**고 말한다.

2) $a<0$일 때 독립변수 x의 값이 늘면 함수 y의 값은 준다. 이때 함수는 **감소한다**고 말한다.



례. 함수 $f(x)=16.9x-1.5$는 증가하는 함수인가 감소하는 함수인가?

두 값 $f(37.87)$과 $f(46.29)$가운데서 어느것이 큰가?

(풀이) $a=16.9>0$이므로 함수 $f(x)=16.9x-1.5$는 증가하는 함수이다.

그리고 $37.87<46.29$이므로 $f(37.87)<f(46.29)$

문 제

1. 다음 함수들이 증가하는 함수인가 감소하는 함수인가를 말하여라.

1) $y=0.1x-100$ 2) $y=1000-0.1x$ 3) $y=3$

2. $f(x)=0.3x+1$일 때 두 값 $f(7)$과 $f(11)$가운데서 어느것이 큰가?

3. $g(x)=-5678x+456$일 때 두 값 $g(256)$과 $g(-372)$가운데서 어느것이 큰가?

련습문제

1. 다음 함수들가운데서 1차함수를 말하여라.

   1) $y=\frac{2}{3x}+5$ 2) $y=1-x^2$ 3) $y=0\cdot x+4$

   4) $y=1$ 5) $y=3x-0.7$

2. 다음 글에서 y를 x의 식으로 표시하고 그것이 1차함수인가를 말하여라.

   1) x에 5를 곱하고 거기에 3을 더하면 y가 된다.

   2) x를 2제곱하고 거기에서 1을 덜면 y가 된다.

   3) 탄창 하나에 탄알이 m개 들어있다. 탄창 x개에 들어있는 탄알의 총수는 y개이다.

3. 다음 함수의 그라프를 그려라.

   1) $y=2.5x+3$ 2) $y=-2x+3$ 3) $y=-4x-1$

4. 3번문제에서 그린 함수의 그라프를 보고 다음 물음에 대답하여라.

   1) 함수값이 0으로 되는 x의 값은 얼마인가?

   2) 함수값이 정수인 x의 구간을 구하여라.

   3) 함수값이 -5보다 작아지는 x의 구간을 구하여라.

   4) x의 값이 늘면 함수 y의 값이 어떻게 변하는가?

5. 그라프가 다음 직선과 같은 1차함수를 구하여라.

   1) 방향결수가 2이고 점 (2, 4)를 지나는 직선

   2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 평행이고 점 $(-2, 2)$를 지나는 직선

   3) 점 (2, 1)을 지나면서 x축과 45°의 각을 이루며 오른쪽으로 가면서 우로 오르는 직선

6. 그라프를 그리지 말고 다음 점들이 함수 $y=-3x+5$의 그라프의 점인가 아닌가를 말하여라.

$$(3,\ -4),\quad (1.8,\ -0.4),\quad (0,\ 3),\quad \left(\frac{1}{3},\ 4\right),\quad \left(\frac{1}{2},\ 6\right)$$

7. 함수 $y=ax+2$의 그라프가 점 (2, 10)을 지난다. a의 값을 구하여라.

8. 함수 $y=-4x+b$의 그라프가 점 (−6, 12)를 지난다. b의 값을 구하여라.

9. 두 함수 $f(x)=3-x$와 $g(x)=4x+1$의 그라프를 그리고 다음 물음에 대답하여라.

   1) $x=2$에서 두 함수의 값을 구하여라. 어느것이 큰가?

   2) 두 함수의 값이 같아지는 x의 값을 구하여라.

   3) f의 값이 g의 값보다 커지는 x의 값을 구하여라.

   4) g의 값이 f의 값보다 커지는 x의 값을 구하여라.

10. 위대한 령도자 **김정일**원수님께서 책을 많이 읽을데 대하여 주신 말씀을 높이 받들고 영남이는 혁명소설을 읽고있다. 이미 150페지를 읽었다. 이제 하루에 30페지씩 x일 읽으면 모두 y페지를 읽게 된다. y는 x의 1차함수인가?

11. 땅으로부터 15km 높이까지의 범위에서 대기온도는 100m 올라가는데 따라 0.6℃씩 낮아진다고 한다. 땅우의 기온이 18℃일 때 땅으로부터 x km 높이의 기온이 y℃이다. y가 x의 1차함수인가? 그라프를 그려라.

12. 함수 $y=-x+2$의 그라프를 구간 [−4, 4]에서 그려라.

13. 함수 $y=-0.5x+10$의 그라프를 구간 [−20, 30]에서 그려라.

14. 다음 함수들의 방향곁수와 그것의 그라프가 y축과 사귀는 점의 자리표를 말하여라.

   1) $y=x-2$,　$y=x$,　$y=x+3$

   2) $y=-0.4x$,　$y=-0.4x+2$,　$y=-0.4x-3$

   1)과 2)의 그라프들은 각각 서로 어떻게 놓이는가?

15. 다음 함수는 증가하는 함수인가 감소하는 함수인가?

1) $y=2360x-3708$　　2) $y=-3\cdot 10^3 x$

3) $y=-0.001x+0.0001$

16. 독립변수의 어느 값에 대응하는 함수값이 더 큰가?

1) $y=\frac{3}{4}x-5$　$\left(x=237\frac{83}{107},\ x=47\frac{4}{57}\right)$

2) $y=\frac{7}{10}-0.051x$　$(x=-87.561,\ x=-89.183)$

17. 함수 $y=ax+b$ 의 그라프가 y축에 관해서 직선 $y=4x-1$에 대칭이다. a, b의 값을 구하여라.

18. 그림 8-6과 같은 직4각형 ABCD의 변을 따라 점 M이 점 A를 떠나 점 B, C를 거쳐 점 D로 온다고 하자. 점 M이 A로부터 $x$cm만큼 움직여갔을 때 △MAD의 면적을 $y$cm^{2}라고 하면 y를 x의 식으로 표시하고 그것의 그라프를 그려라.

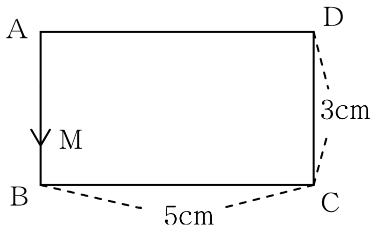


그림 8-6

제3절. 2차함수

1. 2차함수의 의미

알아보기 다음 식으로 주어진 함수에서 독립변수의 2차식으로 표시된 함수를 가려내여라.

$y=-2x^2$, $y=0.4x^2+0.01$, $v=\frac{2}{t^2}-t+1$,

$u=2v^2-v+\frac{3}{4}$,　$2y=\frac{3}{5}x^3+x^2+2$,

$2u=\frac{v^2-2v}{3}+5$

독립변수에 관하여 2차식으로 표시되는 함수를 **2차함수**라고 부른다. 2차함수의 일반모양은 다음과 같다.

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$a=1$, $b=0$, $c=0$일 때의 2차함수 $y=x^2$은 2차함수의 가장 간단한 실례이다.

생활에서는 2차함수로 표시되는 현상을 많이 볼수 있다.

례 1. 처음속도 30m/s로 우로 던진 물체가 t초동안에 올라간 높이를 hm라고 하면 h는 대략 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$h=30t-5t^2$$

이때 올라간 높이 h는 시간 t의 2차함수이다.

례 2. 반경이 $r$cm인 원의 면적을 Scm²라고 하면

$$S=\pi r^2$$

즉 면적 S는 반경 r의 2차함수이다.

문 제

1. 다음 식으로 주어진 함수들가운데서 2차함수를 골라내여라.

1) $y=3x^2-5$　　2) $y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{5}{x}-2$

3) $y=\dfrac{2}{(4-x)^2}+6$　　4) $S=(3-2t)^2+3t-1$

2. 다음 글에서 y는 x의 2차함수인가?

1) 반경이 $x$cm인 원둘레의 길이는 $y$cm이다.

2) 한 변이 $x$cm인 바른4각형을 밑면으로 하고 높이가 7cm인 직6면체의 체적은 $y$cm³이다.

3) 반경이 $x$cm인 구의 겉면적은 $y$cm²이다.

3. $y=ax^2+bx+c$의 a, b, c가 다음과 같은 함수를 써라.

1) $a=2$, $b=0$, $c=-4$　　2) $a=-1$, $b=6$, $c=0$

3) $a=-\dfrac{3}{4}$, $b=c=0$　　4) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-1$, $c=5$

2. 2차함수 $y=ax^2$의 그라프

알아보기 1) x의 값이 2일 때 x^2과 $2x^2$의 값을 비교하여라. 또 x의 값이 -3, -1일 때는 어떤가?

2) $y=x^2$과 $y=2x^2$의 그라프에서 x의 자리표가 다같이 2인 점들의 y자리표사이에는 어떤 관계가 있겠는가?

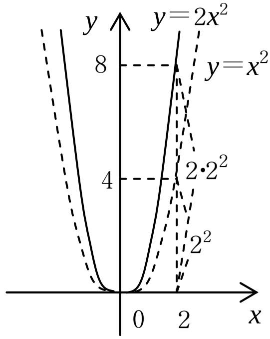


그림 8-7

x의 같은 값에 대응하는 $y=2x^2$의 값은 $y=x^2$의 값의 2배이다.

그러므로 $y=2x^2$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프의 매개 점의 y자리표를 2배해서 얻은 점들로 이루어진다.(그림 8-7)

해보기 1) $y=\frac{1}{2}x^2$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프를 써서 어떻게 그릴수 있겠는가?

2) 점 A(2, 3)과 B(a, b)는 x축에 관하여 서로 대칭이다. a, b의 값은 각각 얼마인가?

3) x의 같은 값에 대하여 함수 $y=2x^2$과 $y=-2x^2$의 값을 비교하여보아라. 무엇을 알수 있는가?(그림 8-8)

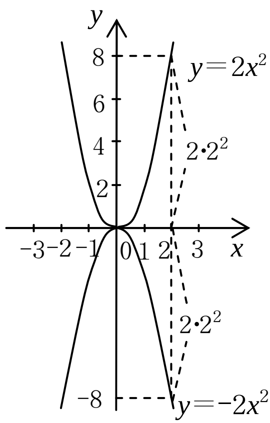


그림 8-8

x의 같은 값에 대하여 $y=-2x^2$의 값은 $y=2x^2$의 값과 절대값이 같고 부호만 다르다.

그러므로 $y=2x^2$과 $y=-2x^2$의 그라프는 x축에 관하여 서로 대칭이다.(그림 8−8)

$y=a x^2$ $(a>0)$의 그라프

$a>0$일 때 $y=x^2$의 그라프를 y축방향으로 a배하면 $y=ax^2$의 그라프가 된다.

$a>0$일 때 $y=ax^2$과 $y=-ax^2$의 그라프는 x축에 관하여 서로 대칭이다.

문 제

1. $y=x^2$의 그라프를 써서 다음 함수의 그라프를 그려라.

   1) $y=3x^2$　　2) $y=0.5x^2$　　3) $y=\frac{1}{3}x^2$

2. $y=\frac{1}{2}x^2$의 그라프는 $y=2x^2$의 그라프보다 더 벌어진다. 왜 그런가?

3. $0<a<b$일 때 함수 $y=ax^2$과 $y=bx^2$의 그라프가운데서 어느것이 더 벌어지겠는가? 어느것이 더 오무라지겠는가?

4. $y=\frac{1}{2}x^2$의 그라프를 써서 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그라프를 그려라.

5. $y=3x^2$의 그라프를 써서 $y=-3x^2$의 그라프를 그려라.

6. $y=-\frac{1}{3}x^2$과 $y=-3x^2$의 그라프모양을 비교하여보아라. 무엇을 알수 있는가?

함수 $y=ax^2$ 의 그라프의 성질을 묶어보면 다음과 같다.

$y=ax^2$ 의 그라프의 성질

1) 그라프는 늘 원점을 지난다.
2) 그라프는 y 축에 관하여 대칭이다.
3) $a>0$ 이면 그라프는 x 축의 웃쪽 반평면에 놓이며 우로 벌어진다. $a<0$ 이면 그라프는 x 축의 아래쪽 반평면에 놓이며 아래로 벌어진다.
4) $|a|$ 가 클수록 그라프는 오무라지고 작을수록 벌어진다.

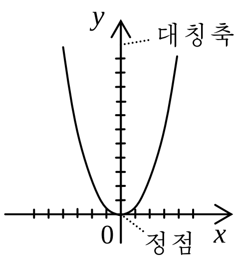


그림 8－9

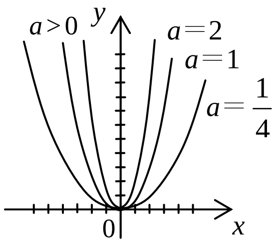


그림 8－10

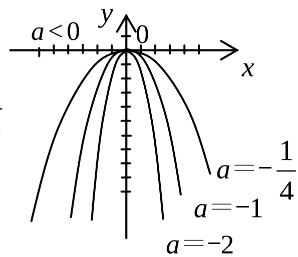


그림 8－11

함수 $y=ax^2(a\neq 0)$ 의 그라프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 부른다.

$y=ax^2$ 의 그라프에서 y 축을 **대칭축**, 대칭축과의 사귐점을 **정점**이라고 부른다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프는 어느쪽으로 벌어졌는가? 또 가장 크게 벌어진것, 가장 좁게 오무라진것은 어느것인가?

1) $y=0.3x^2$ 2) $y=-7.4x^2$ 3) $y=-\frac{1}{5}x^2$

2. 다음 점들가운데서 함수 $y=x^2$ 의 그라프에 놓이는것을 찾아라.
(−2, 4), (2, 2), (−0.5, 0.25), (−3, −9),
$(a,\ a^2)$, $(-a,\ a^2)$

3. 함수 $y=ax^2$의 그라프가 점 (−2, 1)을 지난다. a의 값을 구하여라.

4. 다음 함수의 그라프를 한자리표평면에 그리고 사귐점들의 자리표를 구하여라.

1) $y=x^2$과 $y=-x^2$ 2) $y=x^2$과 $y=x$

3) $y=x^2$과 $y=2x-1$

련습문제

1. 다음 문장들가운데서 옳은것을 골라내여라.

1) 2차함수의 그라프는 a가 클수록 오무라진다.

2) 2차함수의 그라프는 반드시 대칭축을 1개 가지게 된다.

3) 2차함수 $y=ax^2$의 그라프는 a의 부호에 따라 위치가 달라진다.

4) 2차함수 $y=ax^2$의 그라프는 늘 원점을 지난다.

2. 2차함수 $y=2x^2$에서 x가 1에서 3까지 2만큼 변할 때 y의 값은 얼마만큼 변하는가?

3. 점 (m, n)이 함수 $y=x^2$의 그라프에 놓이면 점 $(-m, n)$도 그 그라프에 놓인다. 왜 그런가?

4. 함수 $y=x^2$의 그라프로부터 함수 $y=5x^2$의 그라프를 얻자면 어떻게 하면 되겠는가? 또 함수 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그라프를 얻자면?

5. 함수 $y=x^2$의 그라프를 써서 다음 함수의 그라프를 한자리표평면에 그려라.

1) $y=\frac{1}{4}x^2$ 2) $y=3x^2$

6. 함수 $y=2x^2$의 그라프를 알고 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그라프를 어떻게 그릴수 있겠는가?

7. 다음 함수의 그라프는 어느쪽으로 벌어진 포물선인가? 그것의 정점의 자리표를 각각 구하여라.

1) $y=0.25x^2$　　2) $s=-\frac{1}{3}t^2$

3) $y=1.01x^2-3$　　4) $u=-0.2v^2-2.7$

8. 함수 $y=x^2-bx-6$ 의 그라프가 점 (4, 16)을 지난다. b 의 값을 구하여라.

9. 그림 8－12에 있는 포물선 ①과 ②는 함수 $y=\frac{3}{4}x^2$ 과 $y=\frac{1}{3}x^2$ 의 그라프이다. ①의 점 $\mathrm{M}\left(a,\ \frac{3}{4}a^2\right)$을 지나 y축에 평행인 직선을 긋고 x축과의 사귐점을 A, 포물선 ②와의 사귐점을 N이라고 하자. 또 점 M을 지나 x축에 평행인 직선을 긋고 y축과의 사귐점을 B, 포물선 ②와의 사귐점을 C라고 하자.

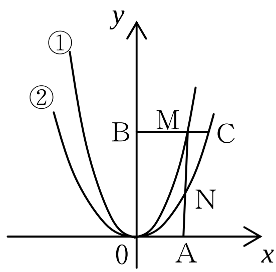


그림 8－12

이때

1) AM∶AN을 구하여라.

2) $a=2$일 때 BM∶BC를 구하여라.

복습문제

1. 다음 함수들의 그라프를 그리고 두 그라프들이 서로 어떤 자리관계에 있는가를 말하여라.

1) $y=x$와 $y=-x$　　2) $y=3x$와 $y=3x-2$

3) $y=0.5x$와 $y=0.5x-2$

2. 독립변수 x가 구간 [2, 5]에서 변할 때 다음 함수들의 함수값은 어느 구간에서 변하는가?

1) $y=1.2x$　　2) $y=1.2x+0.5$

3) $y=2.4-2x$　　4) $y=-4.2-2x$

3. 함수 $y=4x-1$의 그라프를 그려라. 그리고 다음 값을 구하여라.

1) $\{x \mid y>0\}$ 2) $\{x \mid y<0\}$ 3) $\{x \mid y>3\}$

4. 함수 f가 $(-\infty, +\infty)$에서 다음과 같이 주어졌다.

$x\in(-\infty, 1)$에서는 $f(x)=-x-2$

$x\in[1, +\infty)$에서는 $f(x)=3x-5$

이 함수의 그라프를 그려라. 그리고 다음과 같은 모임을 구하여라.

1) $\{x \mid f(x)=0\}$ 2) $\{x \mid f(x)>-1\}$

3) $\{x \mid f(x)>0\}$ 4) $\{x \mid f(x)<0\}$

5. 함수 $y=ax+8$의 그라프가 점 $(-2, 2)$를 지난다. 이 그라프는 또한 다음 점들을 지나는가?

$(-1, 5)$, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $(0.5, 9.5)$, $(4, 5)$

6. 함수 $y=2x-1$의 그라프와 x축에 관해서 대칭인 그라프를 그리고 이 그라프로 표시되는 함수를 구하여라.

7. 용수철의 늘음은 그것에 단 추의 질량에 비례한다. 15g의 추를 달았을 때 용수철의 길이가 18cm였고 30g의 추를 달았을 때는 28cm였다. 추의 질량이 xg, 용수철의 길이를 $y$cm라고 할 때 y를 x의 식으로 표시하여라.

8. 다음 함수의 그라프들가운데서 x축에 관하여 서로 대칭인것들을 찾아라.

1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 2) $y=-x^2$ 3) $y=-\dfrac{3}{2}x^2$ 4) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$

5) $y=3x^2$ 6) $y=\dfrac{3}{2}x^2$ 7) $y=x^2$ 8) $y=-3x^2$

9. 다음 2차함수의 그라프는 어느쪽으로 벌어진 포물선인가? y축과의 사귐점을 구하여라.

1) $y=4x^2+3$ 2) $y=x^2-63$ 3) $y=-3x^2-9$

제9장. 2차방정식

제1절. 2차방정식

1. 인수분해에 의한 2차방정식의 풀이법

알아보기 다음것이 옳은가?

1) $ab=0$이면 $a=0$이다.

2) $ab=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

3) $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$이다.

4) $a=0$ 또는 $b=0$이면 $ab=0$이다.

2차방정식의 왼변이 두 1차식의 적으로 인수분해되면 그 풀이는 쉽게 구할수 있다.

실례로 2차방정식 $x^2-3x-18=0$을 다음과 같이 풀수 있다.

방정식에서 왼변을 인수분해하면

$$x^2-3x-18=(x-6)(x+3)$$

따라서 $x-6=0$ 또는 $x+3=0$

즉 $x=6$, $x=-3$

풀이모임 $\{-3, 6\}$

> $$ax^2+bx+c=a(x-p)(x-q) \ (a\neq 0)$$
> 이면 2차방정식
> $$ax^2+bx+c=0$$
> 의 풀이는 p와 q이다.

례. 2차방정식 $x^2+4x-21=0$을 풀어라.

(풀이) $x^2+4x-21=0$

$(x+7)(x-3)=0$

따라서 $x+7=0$ 또는 $x-3=0$

즉 $x=-7$, $x=3$

풀이모임 $\{-7, 3\}$

문 제

1. 다음 2차방정식을 풀어라.

1) $x^2+13x+36=0$　　2) $x^2+12x=-36$

3) $3(x-2)=x^2-2x$　　4) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$

5) $ax^2+(a+b)x+b=0$　　6) $(y+3)^2-11(y+3)+24=0$

2. $x^2+mx-12=(x+a)(x+b)$에서 a, b는 옹근수이다. 인수분해가 성립되는 m의 값은 모두 (　)개이다.

A. 2　B. 4　C. 6　D. 8

2. 2차3마디식의 변형

2차마디의 결수가 1인 2차3마디식을 $(x+m)^2-n$ $(n\geqslant 0)$ 모양으로 변형할수 있다.

실례로 1) $x^2-3x=x^2-2\cdot\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

2) $x^2+5x+3=x^2+2\cdot\dfrac{5}{2}x+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+3$

$=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+3=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{5^2-4\cdot 3}{4}$

일반적으로 다음 식이 성립한다.

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4c}{4}$$

ax^2+bx+c는 $a(x+m)^2-n$ 모양으로 변형할수 있다.

실례로 $3x^2+7x-5=3\left(x^2+\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}\right)$

$$=3\left[x^2+2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2-\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{5}{3}\right]$$

$$=3\left[\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{109}{36}\right]=3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{7^2-4\cdot3\cdot(-5)}{4\cdot3}$$

2차식 ax^2+bx+c를 $a(x+m)^2-n$모양으로 변형하는것을 **완전2제곱분리한다**고 말한다.

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

문 제

1. 다음 식을 $(x+m)^2-n$ 모양으로 변형하여라.

1) x^2+2x 2) y^2+3y 3) z^2-12z

4) $0.6x-x^2$ 5) x^2-x-12 6) $x^2+0.4x+3$

7) $32-12x+x^2$ 8) $-x^2+14x+24$

2. $(x+m)^2-n$모양으로 변형하여 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-5x+3=0$ 2) $8-3x-x^2=0$

3. 다음 식들을 완전2제곱분리하여라.

1) $4x^2+12x-7$ 2) $3x^2-7x+5$ 3) $2t^2-t-6$

4) $2y^2+5y-1$ 5) $10-9x-2x^2$ 6) $\frac{1}{2}z^2-4z+5$

7) $0.3x^2-x+0.5$ 8) $\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}$

3. 2차방정식의 풀이공식

2차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 풀이공식을 만들어보자.
방정식의 왼변을 완전2제곱분리하면

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$b^2-4ac\geqslant 0$이면

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$ax^2+bx+c=0$의 풀이공식

$$x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad (b^2-4ac\geqslant 0)$$

특히 $b^2-4ac=0$이면

$$x_{1,\,2}=-\frac{b}{2a}\qquad (\text{겹풀이})$$

례 1. 2차방정식 $3x^2+2x-5=0$을 풀어라.

(풀이) $a=3,\ b=2,\ c=-5$이므로

$b^2-4ac=4-4\cdot 3\cdot(-5)=64>0$

따라서 방정식은 2개의 풀이를 가진다.

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm 8}{2\cdot 3}$$

$$x_1=1,\quad x_2=-\frac{5}{3}$$

풀이모임 $\left\{-\frac{5}{3},\ 1\right\}$

례 2. 2차방정식 $4x^2-12x+9=0$을 풀어라.

(풀이) $a=4,\ b=-12,\ c=9$이므로

$b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$

따라서 방정식은 겹풀이를 가진다.

$$x_{1,\ 2}=\frac{12}{2\cdot4}=\frac{3}{2}$$

풀이모임 $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

문 제

1. 다음 2차방정식을 풀어라.

1) $2x^2+3x+1=0$　2) $3x^2+7x+1=0$　3) $3x^2-7x+4=0$

4) $9x^2+3x-20=0$　5) $2x^2+8x+2=0$　6) $9x^2-6x+1=0$

2. 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 1차마디식의 곁수 b가 짝수일 때 풀이공식은 어떻게 되겠는가?

3. 방정식 $x^2-|x|-1=0$의 풀이는 (　)이다.

1) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　2) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

3) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$　4) $\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. 2차방정식의 판별식

알아보기 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이공식에서 $\mathrm{D}=b^2-4ac$로 놓자.

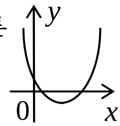
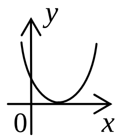
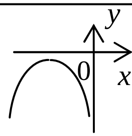
1) $\mathrm{D}>0$이면 풀이는 몇개인가? 그리고 풀이는 어떻게 표시되는가?

2) $\mathrm{D}=0$이면 풀이는 몇개인가? 그리고 풀이는 어떻게 표시되는가?

3) $\mathrm{D}<0$이면 풀이가 있는가?

2차방정식의 풀이가 몇개인가를 알자면 $\mathrm{D}=b^2-4ac$의 값을 0과 비교하면 된다.

$\mathrm{D}=b^2-4ac$를 2차방정식의 **판별식**이라고 부른다.

판별식의 값	풀　이	풀이의 개수
$D>0$	$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	서로 다른 풀이 2개 
$D=0$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	풀이 1개 (겹풀이) 
$D<0$	풀이 없음	

례. 다음 방정식의 풀이는 몇개인가?

1) $2x^2-3x+1=0$　2) $4x^2-9x+6=0$　3) $9x^2-24x+16=0$

(**풀이**) 1) $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=1>0$이므로 서로 다른 풀이 2개를 가진다.

2) $D=(-9)^2-4\cdot4\cdot6=-15<0$이므로 풀이를 가지지 않는다.

3) $D=(-24)^2-4\cdot9\cdot16=0$이므로 겹풀이 1개를 가진다.

문 제

1. 다음 방정식은 몇개의 풀이를 가지는가?

1) $7x^2+6x-3=0$　2) $16x^2-8x+1=0$　4) $(x+1)^2=2x^2-5$

2. m이 어떤 값을 가질 때 다음 방정식이 서로 다른 2개의 풀이를 가지겠는가?

1) $3x^2-10x+m=0$　2) $mx^2+3x-1=0$

3. k가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식은 겹풀이를 가지는가?

1) $3x^2+2x+k=0$　2) $kx^2+3x-1=0$　3) $x^2-4kx+8k-3=0$

4. m이 어떤 값을 가질 때 방정식 $(m^2-2)x^2-2(m+1)=0$이 서로 다른 2개의 풀이를 가지겠는가?

5. 2차방정식의 풀이와 곁수사이의 관계

2차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$에서 판별식 $\mathrm{D}=b^2-4ac\geq 0$이라고 하면

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\mathrm{D}}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

이때 $x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}=-\dfrac{2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\mathrm{D}})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-\mathrm{D}}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

> p, q가 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 풀이이면
>
> $$p+q=-\frac{b}{a} \qquad p\cdot q=\frac{c}{a}$$

례. 다음 방정식의 두 풀이의 합과 적을 구하여라.

$$2x^2+x-6=0$$

(풀이) $a=2$, $b=1$, $c=-6$이므로

$\mathrm{D}=1^2-4\cdot 2\cdot(-6)=49>0$

따라서 2개의 풀이 p와 q를 가진다.

$$p+q=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2},\qquad p\cdot q=\frac{c}{a}=\frac{-6}{2}=-3$$

문 제

1. 2차방정식 $x^2+px+18=0$의 한 풀이가 6이다. 다른 한 풀이와 곁수 p를 구하여라.

2. 2차방정식 $x^2-m^2x+3n-1=0$의 풀이는 2와 7이다. m과 n의 값을 구하여라.

3. 2차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 풀이를 p, q라고 할 때 $p-3$, $q-3$을 풀이로 가지는 2차방정식을 만들어라.

4. 방정식 $2x^2-(a+1)x+a+3=0$의 두 풀이의 차가 1이면 a의 값은 (　　)이다.

1) 9와 -3　　2) 9와 3　3) -9와 3　4) -9와 -3

6. 2차방정식으로 이끌어지는 방정식

례 1. 다음 방정식을 풀어라.

$$2x^4-9x^2+4=0$$

(풀이) $x^2=y$로 놓으면 $2y^2-9y+4=0$

$$(2y-1)(y-4)=0$$

$$y_1=\frac{1}{2},\ y_2=4$$

$$x^2=\frac{1}{2},\ x_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2=4,\ x_3=2,\ x_4=-2$$

풀이모임 $\{-2,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 2\}$

례 2. 다음 방정식을 풀어라.

$$(x^2+x-3)(x^2+x-5)-3=0$$

(풀이) $x^2+x=y$ 로 놓으면

$$(y-3)(y-5)-3=0$$

$$y^2-8y+15-3=0$$

$$y^2-8y+12=0$$

$$(y-2)(y-6)=0$$

$$y_1=2,\ \ y_2=6$$

$\therefore$ $x^2+x=2$, $x^2+x-2=0$ 이므로

$$x_1=-2,\ \ x_2=1$$

또 $x^2+x=6$, $x^2+x-6=0$ 이므로

$$x_3=-3,\ \ x_4=2$$

풀이모임 $\{-3,\ -2,\ 1,\ 2\}$

문 제

다음 방정식을 풀어라.

1. 1) $3x^4-8x^2-3=0$ 2) $6x^4-19x^2+10=0$

3) $5x^4-22x^2+8=0$

2. 1) $(x^2-3x)^2-16(x^2-3x)=0$

2) $(x^2+4x+5)^2-12(x^2+4x)-40=0$

3) $(3x^2-7x+2)^2-7(3x^2-7x+1)+3=0$

례 3. 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y=7 & ① \\ xy=10 & ② \end{cases}$$

(풀이) 방정식 ①로부터

$$y=7-x \quad ③$$

이것을 ②에 갈아넣고 정돈하면

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-5)(x-2)=0$$

$$x_1=5,\ x_2=2$$

이것을 각각 ③에 갈아넣으면

$$y_1=2,\ y_2=5$$

풀이모임 $\{(5,\ 2),\ (2,\ 5)\}$

례 4. 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 & ① \\ 4x^2-9xy+y^2=-14 & ② \end{cases}$$

(풀이) ①×2+②

$$6x^2-11xy+3y^2=0 \quad ③$$

왼변을 인수분해하면

$$(3x-y)(2x-3y)=0$$

이로부터

$$3x-y=0,\ 2x-3y=0 \quad ④$$

이리하여 ①과 ④로 된 2개의 련립방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

이것을 각각 풀면 4개의 풀이를 얻는다.

풀이모임 $\{(1, 3), (-1, -3), (3, 2), (-3, -2)\}$

문 제

다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} xy = 18 \\ x - y = 10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 44 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 16 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 6x^2 + xy - y^2 + 25y = 150 \end{cases}$

련습문제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2 - x - 2 = 0$ 2) $y^2 + y - 12 = 0$ 3) $z^2 + 8z + 16 = 0$

4) $t^2 + 2t - 48 = 0$ 5) $u^2 - 4u - 32 = 0$

2. 다음 식을 $a(x+m)^2 - n$모양으로 변형하여라.

1) $x^2 - 8x$ 2) $x^2 + 10x + 21$ 3) $5x - x^2$

4) $x^2 - 3x + 1$ 5) $3x^2 - 7x + 2$ 6) $-2x^2 + 6x + 5$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2 + 5x + 3 = 0$ 2) $x^2 - 0.2x - 0.03 = 0$ 3) $y^2 - 24y - 13 = 0$

4) $t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{2} = 0$ 5) $\frac{1}{2}u^2 - \frac{5}{3}u = \frac{4}{3}$ 6) $\frac{x^2 + 1}{10} = \frac{x}{3}$

4. 다음 방정식은 풀이를 가지지 않는다. 그 리유를 말하여라.

1) $x^2 + x + 3 = 0$ 2) $(x-3)^2 + 5 = 0$ 3) $3x^2 - 8x + 6 = 0$

5. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ 2) $y^2 - 4ay + 4a^2 = b^2$

3) $x^2 - 3ax + 2a^2 - ab - b^2 = 0$

6. 다음 방정식의 풀이의 개수를 구하여라.

1) $x^2-4x-4=0$　　2) $-7x^2+x-1=0$　　3) $72x-4=x^2$

7. k가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식이 겹풀이를 가지는가?

1) $x^2-kx+4=0$　　2) $kx^2+4x+1=0$

3) $2x^2-4x+k=0$　　4) $x^2+kx+k-1=0$

8. k가 어떤 값을 가질 때 방정식 $5x^2-7x+k=0$이 2개의 풀이를 가지겠는가?

9. p, q가 2차방정식 $3x^2+5x+1=0$의 령 아닌 두 풀이일 때 다음 값들을 계산하여라.

1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$　　2) $\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}$

10. 방정식 $x^2+ax+2=0$의 한 풀이가 2이다. 다른 풀이를 구하여라.

11. 방정식 $x^2-kx+k^2-13=0$의 한 풀이는 다른 풀이의 3배이다. 실수 k의 값을 구하여라.

탐구

2차방정식에서 풀이와 결수사이의 관계를 다음과 같은 방법으로 이끌어낼수 있다.

2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 풀이를 p, q라고 하면 다음 같기식이 성립한다.

$$ax^2+bx+c=a(x-p)(x-q)$$

웃식에서 오른변을 정돈하고 결수들을 비교하면 다음 같기식이 성립한다.

$$-a(p+q)=b$$

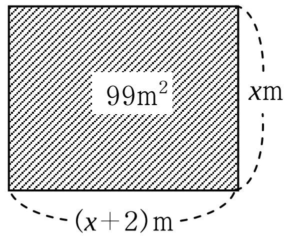
$$apq=c$$

즉　$p+q=-\dfrac{b}{a}$,　$p \cdot q=\dfrac{c}{a}$

3차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 풀이와 결수사이에는 어떤 관계가 있는가?

제2절. 2차방정식 세우기

례 1. 토끼를 많이 기를데 대하여 주신 위대한 령도자 **김정일**원수님의 말씀을 높이 받들고 어느 한 학교에서 토끼우리를 새로 더 지으려고 한다. 면적은 99m^2, 길이는 너비보다 2m 더 긴 직4각형모양의 부지를 잡으려면 길이와 너비를 얼마씩 잡아야 하는가?



(풀이)

(1) 토끼우리의 너비를 xm라고 하자.

(2) 면적이 99m^2이므로 이것을 방정식으로 옮겨쓰면

$x \cdot (x+2) = 99$

너비 · 길이 → 면적

(3) $x^2+2x-99=(x+11)(x-9)=0$

풀이는 -11, 9

(4) 너비 x는 정수여야 하므로 풀이 -11은 버린다.

답. 너비 9m
길이 11m

(1) 구하려는 량을 표시하는 글자를 정한다.

(2) 같아질 조건을 식으로 옮겨쓴다.

(3) 방정식을 푼다.

(4) 방정식의 풀이가 문제의 조건에 맞는가 따져본다. 문제의 조건에 맞지 않는것은 버린다.

문 제

1. 련이어있는 두 자연수의 2제곱의 합은 365이다. 두 수를 구하여라.
2. 어떤 자연수와 그보다 5만큼 큰 수의 적은 14이다. 그 수들을 구하여라.

3. 련이어있는 3개의 정의 짝수들가운데서 제일 큰 수의 2제곱은 다른 두 수의 2제곱의 합보다 12만큼 더 크다. 세 수를 구하여라.

4. 길이가 너비의 2배인 직4각형모양의 철판의 네 귀에서 한 변이 5cm인 바른4각형을 잘라내고 접어서 용적이 1 500cm^{3}인 그릇을 만들었다. 너비가 얼마인 철판을 썼는가?

례 2. 어떤 물체를 우로 곧추 던졌는데 t초사이에 올라간 높이는 $(30t-5t^2)$m이다. 물체를 던진 후 몇초후에 그 높이가 40m로 되겠는가?

(풀이) $30t-5t^2=40$에 맞는 t의 값을 구해야 한다.

이 방정식을 정돈하고 풀면

$$t^2-6t+8=0$$

$$(t-2)(t-4)=0$$

$$t_1=2\ ,\ t_2=4$$

두 풀이는 다 문제의 조건에 맞는다.

여기서 2초는 올라갈 때이고 4초는 내려올 때이다.

답. 2초, 4초

례 3. 20%짜리 소금물 50kg이 통에 들어있다. 이것을 11.2%짜리 소금물로 만들기 위하여 통에서 몇kg 퍼내고 그만큼 물을 넣었다. 잘 섞은 다음 처음 퍼낸 량의 1.5배만큼 퍼내고 그만큼 물을 넣어서 만들려는 소금물을 얻었다. 처음 몇kg의 소금물을 퍼냈는가?

(풀이) 처음 퍼낸 소금물이 $x$kg이라고 하자.

20%짜리 소금물 50kg에 들어있는 소금량은

$$50\times0.2=10$$

50kg의 소금물에서 $x$kg을 퍼내고 그만큼 물을 넣었을 때 통에 남는 소금량은

$$10\times\frac{50-x}{50}$$

다시 1.5배를 퍼내고 그만큼 물을 넣었을 때 통에 남는 소금량은

$$\left(10\times\frac{50-x}{50}\right)\times\left(\frac{50-1.5x}{50}\right)$$

11.2%짜리 소금물 50kg에 들어있는 소금량은

$$50\times\frac{11.2}{100}=5.6$$

문제의 조건에 맞는 방정식을 만들면

$$\left(10\times\frac{50-x}{50}\right)\left(\frac{50-1.5x}{50}\right)=5.6$$

이 방정식을 정돈하고 풀면

$$3x^2-250x+2200=0$$

$$(x-10)(3x-220)=0$$

$$x=10,\ x=\frac{220}{3}$$

그런데 퍼내는 소금물이 50kg을 넘을수 없으므로 $\frac{220}{3}$은 버린다.

답. 10kg

문제

1. 례 2에서 물체가 25m 높이에 이르는것은 몇초만인가? 또 몇초만에 물체가 땅에 떨어지겠는가?

2. 직3각형의 면적은 150cm^{2}이고 직각변들의 합은 35cm이다. 이 3각형의 둘레의 길이를 구하여라.

3. 직3각형의 빗변의 길이는 10cm이고 직각변들의 비는 3 : 4이다. 직각변들의 길이를 구하여라.

4. 농도가 50%인 용액 45L가 통에 들어있다. 이것을 32%짜리 용액으로 만들기 위하여 통에서 몇L 퍼내고 그만큼 물을 넣었다. 잘 섞은 다음 다시 처음에 퍼낸 량만큼 퍼내고 그만큼 물을 넣었더니 요구되는 용액이 얻어졌다. 얼마씩 퍼냈는가?

련습문제

1. 련이어있는 5개의 옹근수가 있다. 첫 세 수의 2제곱의 합이 나머지 두 수의 2제곱의 합과 같다. 이 수들을 구하여라.
2. 어떤 다각형의 대각선의 수가 모두 27개이다. 변의 개수를 구하여라.
3. 위대한 조국해방전쟁시기 어느 한 마을의 인민들이 미제원쑤놈들을 족치는 우리 인민군용사들을 도와 탄약상자를 날랐다. 나른 상자수는 두자리수인데 열의 자리의 수자는 하나의 자리의 수자보다 2만큼 크고 그 적은 48이다. 나른 상자수는 얼마인가?
4. 바른4각형모양의 철판에서 변두리를 따라 폭이 3cm인 띠를 잘라내면 남은 철판의 면적이 196cm^2로 된다. 처음 철판의 면적은 얼마인가?
5. 직3각형의 한 직각변과 빗변의 비는 12 : 13이고 다른 직각변은 15cm이다. 이 직3각형의 둘레의 길이를 구하여라.
6. 어떤 물체를 우로 곧추 던졌는데 t초동안에 $(40t-5t^2)$m 올라간다면 몇초만에 80m의 높이에 있겠는가?
7. 바른4각형모양의 얇은 철판의 네 귀에서 한 변이 4cm인 바른4각형을 잘라내고 접어서 용적이 1 600cm^3인 함을 만들려고 한다. 한 변의 길이가 얼마인 철판을 써야 하는가?
8. 32%짜리와 24%짜리 소금물이 통 A와 B에 각각 300L씩 들어있다. 통 A에서 얼마만큼 퍼내여 통 B에 넣고 잘 섞은 다음 넣은 량의 2배만큼 퍼내여 통 A에 넣었더니 29%짜리 소금물이 얻어졌다. 처음에 통 A에서 몇L를 퍼냈는가?

복습문제

1. 다음 방정식을 인수분해하는 방법으로 풀어라.

1) $x^2+9x-10=0$　　2) $y^2-27y+72=0$

3) $2z^2+5z-12=0$　　4) $6t^2-11t-10=0$

5) $2(u-3)^2-5(u-3)+2=0$　　6) $x^2+2ax+(a^2-b^2)=0$

2. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-0.3x-1.2=0$　　2) $x^2-3\frac{5}{12}x+2=0$

3) $x^2-\frac{12}{5}x-13=0$　　4) $3x^2+11x+6=0$

5) $(x-4)(4x-3)+3=0$　　6) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $3y^2+(1-6b)y=2b$　　2) $ax^2+(a+1)x+1=0$

3) $a^2(x^2-x+1)-a(x^2-1)=(a^2-1)x$

4. 다음 방정식을 풀어라.

1) $2x^2-2\sqrt{5}x+\sqrt{6}=0$　　2) $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x-2=0$

3) $x^2+|x|-12=0$

5. a가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식은 풀이를 가지는가?

1) $2x^2+5x+a=0$　　2) $ax^2-7x-1=0$

6. a가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식은 풀이를 가지지 않는가?

1) $3x^2-2x+a=0$　　2) $4x^2+ax+1=0$

7. k가 얼마일 때 다음 방정식이 겹풀이를 가지는가?

1) $x^2-kx+9=0$　　2) $5x^2+7x+k=0$

8. 방정식 $ax^2-(2a-3)x+a-2=0$이 풀이를 가지도록 a의 값을 정하여라.

9. 방정식 $3(x-1)(x-2k)=(k-2)x$의 두 풀이의 합과 적이 같게 되자면 k가 어떤 값을 가져야 하는가? 그때의 풀이를 구하여라.

10. 방정식 $ax^2+bx+3c=0$의 두 풀이를 p, q라고 할 때 다음 식을 a, b, c로 표시하여라.

1) $\dfrac{p}{p+1}+\dfrac{q}{q+1}$　　2) p^3+q^3

11. 2차방정식 $ax^2-4x+a-5=0$의 한 풀이가 $x=2$일 때 a의 값과 다른 풀이를 구하여라.

12. $x^2+(k+1)x+(2k-1)=0$이 겹풀이를 가지도록 k를 구하여라.

13. 방정식 $9x^2-2ax+a-5=0$의 두 풀이의 차가 2이다. a의 값을 구하여라.

14. a가 어떤 값을 가질 때 다음 방정식이 겹풀이를 가지는가?

1) $3x^2-10x+a=0$　2) $ax^2-3x-2=0$　3) $x^2-ax+2a-3=0$

15. 어떤 수의 4배에서 1을 던 수와 4배에 1을 더한 수의 적은 48과 같다. 어떤 수를 구하여라.

16. 지난 조국해방전쟁시기 우리의 인민군용사들은 위대한 수령 **김일성**대원수님의 명령을 높이 받들고 미제침략자들을 비롯한 원쑤놈들을 무자비하게 소멸하였다. 조국해방전쟁시기에 배출된 공화국영웅의 수는 300보다 큰 세자리수이다. 백의 자리의 수자는 열의 자리의 수자보다 2만큼 크고 하나의 자리의 수자는 열의 자리의 수자와 같다. 백의 자리의 수자와 열의 자리의 수자의 적은 하나의 자리의 수자의 5배이다. 공화국영웅수를 구하여라.

17. 어떤 바른6면체의 모든 변을 2cm만큼 늘이면 체적은 386cm^3만큼 더 늘어난다고 한다. 처음 바른6면체의 한 변의 길이를 구하여라.

18. 길이가 25m, 너비가 18m인 직4각형모양의 철판에서 가장 큰 원판을 잘라내고 나머지 부분에서 또 가장 큰 원판을 잘라내려고 한다. 작은 원판의 반경을 구하여라.

19. 길이가 6m, 너비가 3m인 식탁에 보를 씌우려고 한다. 보의 면적은 식탁의 면적의 2배이고 드리우는 부분의 폭은 다 같다. 보의 길이와 너비는 얼마인가?

20. 5L의 알콜이 들어있는 통 A와 10L의 물이 들어있는 통 B가 있다. 두 통에서 각각 같은 량의 알콜과 물을 퍼내여 서로 바꾸어넣었다. 잘 섞은 다음 한번 더 그렇게 하였더니 두 통에서 알콜의 농도가 같게 되였다고 한다. 처음에 통 A에서 몇L의 알콜을 퍼냈는가?

상식

방정식과 갈롸

갈롸(1811년−1832년)는 프랑스수학자로서 현대대수학의 창시자들가운데의 한 사람이다. 이딸리아수학자들인 따르딸리아와 페라리에 의하여 1745년에 3차방정식과 4차방정식의 풀이법들이 발표된 후 세계의 수많은 수학자들은 거의 300년동안 5차이상방정식의 풀이공식을 이끌어내기 위한 고심어린 연구를 진행하였지만 이렇다할 결과를 얻지 못하였다. 갈롸는 17살에 임의의 차수를 가진 방정식을 대수적방법으로 푸는 문제(방정식의 풀이공식을 더하기, 덜기, 곱하기, 나누기, 루트산법에 의하여 표시하는 문제)를 완전히 해명함으로써 300년동안 내려오던 이 문제에 대한 종지부를 찍었다. 그는 5차이상의 방정식을 대수적방법으로 푸는것은 불가능하다는것을 증명하였을뿐만아니라 임의의 차수를 가진 방정식이 대수적방법으로 풀리기 위한 조건을 밝혔다. 그리고 그 과정에 완전히 새로운 대수학리론인 갈롸리론을 내놓았다.

복습문제의 답

제1장

1. 1) 옳지 않다. 2) 옳다. **2**. AQ=BP **3**. AE=BD **4**. BD=CE **6**. 2등변3각형 **7**. 등변4각형 **12**. 2m **16**. AD=16cm, BC=24cm

제2장

3. 1) $(-2, 2)$ 2) $(-\infty, -3)$ 3) $\left(\frac{1}{3}, 3\right]$ 4) $(1, +\infty)$ **4**. 1) $(-\infty, -11)$ 2) ϕ **5**. 1) ϕ 2) $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right]$ **6**. 1) $\{3, 4, \cdots, 12\}$ 2) $\{12, 13, 14\}$ **7**. 1) $\left(\frac{3}{2}, m\right)$ 2) $2<m<3$일 때 $(m, 3)$, $m\geqslant 3$일 때 ϕ **8**. $[4, +\infty)$ **9**. $\frac{33}{47}$ **10**. 120g보다는 많고 200g보다는 적은 량 **11**. 20km이상 22km이하 **12**. 45명

제3장

1. 1) 옳다. 2) 옳지 않다. 3) 옳다. 4) 옳지 않다. 5) 옳다. **2**. 1) $3x^4+5x+2=(x^2-2x+1)(3x^2+6x+9)+17x-7$ 2) $x^4-3x^2+x-9=(x^3-x+2)\cdot x-2x^2-x-9$ **3**. $a=-25$, $b=-30$ **4**. -2 **5**. x^3-2x^2+x-2 **6**. 8, $-x+5$ **7**. x^2-x+1, $-x+1$ **8**. 1) $(x-1)(x^2-4x-4)$ 2) $(x-1)(x^3+3x^2+3x+3)$ 3) $(x+1)(x^4-x^3-x^2+x-1)$ 4) $(x+3)(x+1)^2(x-2)^2$ **9**. 1) $\{-5, 5\}$ 2) $\{-25, 0\}$ 3) $\{-31, 0\}$ 4) $\left\{0, \frac{125}{3}\right\}$ **10**. 1) 2개 2) 2개 **11**. 1) $(-\infty, -5)\cup(2, +\infty)$ 2) $(-\infty, -2)\cup(5, +\infty)$ 3) $(-\infty, -6)\cup(2, +\infty)$ 4) $(-\infty, -2)\cup(6, +\infty)$

제4장

1. 1) $3x^3-6x^2-36x$ 2) $-10x^5+5x^4-15x^3+5x^2$ 3) $-x^4+3x^3+10x^2$ 4) $30x^4-5x^3-60x^2$ **2.** 1) $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ 2) $(x^2-x-8)(x^2-x+6)$ 3) $(x+a)(x-a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$ 4) $(x+a)(x^2-ax+a^2)(x^6-a^3x^3+a^6)$ **3.** 1) ○ 2) ○ 3) × 4) ×
4. 1) $(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$ 2) $(-\infty, -5)\cup(-5, 0)\cup(0, +\infty)$ 3) $(-\infty, 1)\cup(1, 3)\cup(3, +\infty)$ 4) $(-\infty, -4)\cup(-4, 6)\cup(6, +\infty)$ 5) $(-\infty, +\infty)$ 6) $(-\infty, -2)\cup(-2, 0)\cup(0, +\infty)$ 7) $(-\infty, +\infty)$ 8) $(-\infty, 0)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$ **5.** 1) $v=\dfrac{60}{t}-90$ 2) $0<t<\dfrac{2}{3}$ 3) 210km/h, 150km/h **6.** $a\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b+c}\right)$, 2일간 **7.** 1) $x=\dfrac{1}{2}$ 2) $x=-1,\ x=5$ 3) $x=0,\ x=3$ 4) $x=-3,\ x=3$ 5) $x=7$ 6) $x=\dfrac{3}{2}$ **8.** 1) -1 2) $\dfrac{1}{x+y}$ 3) $\dfrac{2}{2x+1}$ 4) $\dfrac{15a+8}{4a^2-9}$ **9.** 1) $\dfrac{x+y}{2y}$ 2) $\dfrac{4a(a+2b)}{5b(a-2b)}$ 3) $1+\dfrac{1}{x}$ 4) $\dfrac{7(x-1)}{5(x+2)}$ **10.** 1) $\dfrac{a+b}{5(a-b)}$ 2) $\dfrac{a+2}{a-2}$ 3) 1 **11.** 1) $\dfrac{x}{x+1}$ 2) $\dfrac{x(x+2)}{2}$ 3) $\dfrac{x+1}{x+3}$ 4) $-\dfrac{b}{a}$
12. 1) $\dfrac{a+1}{ax}$ 2) $\dfrac{3(x-2)}{2(x+3)}$

제5장

1. 1) 37.5, 0.041, 0.11% 2) 53 000, 419.6, 0.785% 3) 2 600, 31.57, 1.23% **2.** 1) 2 2) 4, 3, 9 3) 4, 9, 3 4) 5, 2 5) 2, 1, 6, 5, 0 **3.** 1) 0.05×10^2 2) 0.0005×10 3) 0.0005×10^4

4) 0.00005×10^5 5) 0.005×10^{-2} 6) 0.0005×10^{-3} 7) 0.5×10^{12}
4. 1) 첫 학생 2) L_3 **5**. $\delta a=\frac{\Delta a}{|a|}$, $\Delta a=|a|\cdot\delta a$, $|a|=\frac{\Delta a}{\delta a}$, $A=a\pm\Delta a$ **6**. 3.46, 3.55 **7**. 14 **8**. 9.2×10^4kg **9**. 1) 4.3×10^3 2) 5.6×10^{-3} 3) 2.384×10 4) 9.80×10^{-1} **10**. 1) 1.5×10^8km 2) 1×10^{-6}m 3) 1.6×10^{-19}C

제6장

2. 40° **3**. 2cm **6**. 72°, 36° **9**. 66°, 48°, 66° **12**. 6cm

제7장

2. 1) 85 2) 120 3) 10^2 4) $\frac{11}{65}$ **3**. $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ **4**. 4배, 9배, $\frac{1}{4}$배 **5**. 1) 약 2.76m 2) 약 7.98m **7**. 1) $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ 2) $a\in(-\infty, +\infty)$, $b\geqslant0$ 3) $a<0$, $b\geqslant0$ 4) $a\geqslant0$, $b\geqslant0$
8. 1) a, b는 모든 값 2) a, b는 모든 값 3) $a<0$, b는 모든 값 4) a는 모든 값, $b\geqslant0$ **11**. 1) $4\sqrt{2}$ 2) $-\sqrt{11}$ 3) 8 4) $4\sqrt{2}$ 5) $\frac{na^3}{m}(a+b)-a^3b^3$ 6) $a+b-\sqrt{ab}$ **12**. 1) 6 2) 8 3) $\frac{a+b}{a-b}$ 4) $\frac{-2\sqrt{b}}{a(1-b)}$ **13**. 1) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$ 2) $5-2\sqrt{6}$ 3) $\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ 4) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ **15**. $\sqrt{5}$ **16**. 1) $2a$ 2) $4a^2-2$

제8장

2. 1) [2.4, 6] 2) [2.9, 6.5] 3) [−7.6, −1.6] 4) [−14.2, −8.2]
3. 1) $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 2) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ 3) $(1, +\infty)$ **4**. 1) $\left\{-2, \frac{5}{3}\right\}$ 2) $(-\infty, -1)\cup\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ 3) $(-\infty, -2)\cup\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ 4) $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$

5. 지난다, 지나지 않는다, 지난다, 지나지 않는다 **6**. $y=-2x+1$

7. $y=\frac{2}{3}x+8$ **8**. 1)과 4), 2)와 7), 3)과 6), 5)와 8) **9**. 1) 우로, (0, 3) 2) 우로, (0, −63) 3) 아래로, (0, −9)

제9장

1. {−10, 1} 2) {3, 24} 3) $\left\{-4,\ \frac{3}{2}\right\}$ 4) $\left\{-\frac{2}{3},\ \frac{5}{2}\right\}$ 5) $\left\{3\frac{1}{2},\ 5\right\}$ 6) $\{-(a-b),\ -(a+b)\}$ **2**. 1) $\left\{\frac{3+\sqrt{489}}{20},\ \frac{3-\sqrt{489}}{20}\right\}$ 2) $\left\{\frac{8}{3},\ \frac{3}{4}\right\}$ 3) $\left\{5,\ -\frac{13}{5}\right\}$ 4) $\left\{-\frac{2}{3},\ -3\right\}$ 5) $\left\{1,\ \frac{15}{4}\right\}$ 6) {−3, 8} **3**. 1) $\left\{-\frac{1}{3},\ 2b\right\}$ 2) $a\neq 0$ 일 때 $\left\{-1,\ -\frac{1}{a}\right\}$, $a=0$ 일 때 {−1} 3) $a\neq 0,\ a\neq 1$일 때 $\left\{\frac{a+1}{a},\ \frac{a}{a-1}\right\}$, $a=0$일 때 {0}, $a=1$일 때 {2} **4**. 1) $\left\{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right\}$ 2) $\{-4-2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\}$ 3) {−3, 3}

5. 1) $a\leqslant \frac{25}{8}$ 2) $a\geqslant \frac{-49}{4}$ **6**. 1) $a>\frac{1}{3}$ 2) $-4<a<4$ **7**. 1) $k=6,\ k=-6$ 2) $k=\frac{49}{20}$ **8**. $a\leqslant \frac{9}{4}$ **9**. $k=-1$ **10**. 1) $\frac{6c-b}{3c-b+a}$ 2) $-\frac{b^3}{a^3}+\frac{9bc}{a^2}$ **11**. $a=\frac{13}{5}$, 다른 풀이 $x=-\frac{6}{13}$

12. $k=1,\ k=5$ **13**. $a=-3,\ a=12$ **14**. 1) $a=\frac{25}{3}$ 2) $a=-\frac{9}{8}$ 3) $a=2,\ a=6$ **15**. $\frac{7}{4}$ 또는 $-\frac{7}{4}$ **16**. 533명 **17**. 7cm **18**. 4cm

19. 길이 약 7.68m, 너비 약 4.68m **20**. $\frac{10}{3}$L

수 학(중학교 제3학년용)

집필	교수 박사 류해동, 부교수 남호석, 부교수 김희일, 부교수 홍성구, 김영철, 황철룡, 김봉희	**심사**	심의위원회
편집	변정학	**콤퓨터편성**	변정학
장정	류명심	**교정**	한순희
낸곳	교육도서출판사	**인쇄소**	교육도서인쇄공장
인쇄	주체99(2010)년 10월 5일	**발행**	주체99(2010)년 10월 15일

교－10－595 값 10원